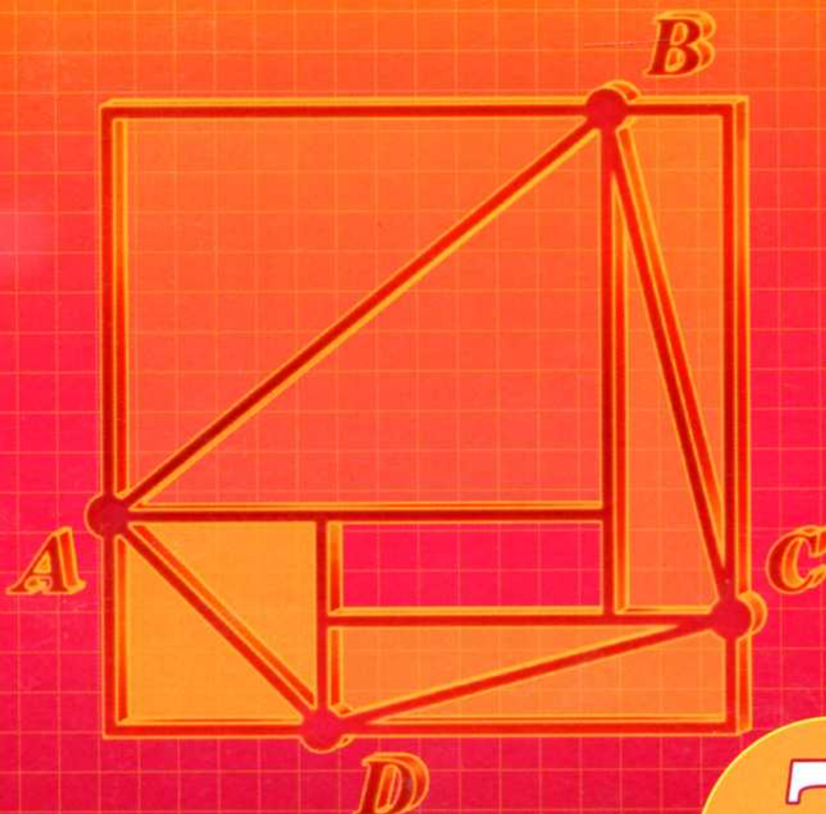
ИННОВАЦИОННАЯ
ШКОЛА

МАТЕМАТИКА

Многоуровневое обучение



7
класс

«РУССКОЕ СЛОВО»

ИННОВАЦИОННАЯ ШКОЛА

**В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов,
А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.В. Фокин**

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

**Учебник для 7 класса
общеобразовательных организаций**

Под редакцией
академика РАН В.В. Козлова
и академика РАО А.А. Никитина

3-е издание

Рекомендовано Министерством образования и науки
Российской Федерации

Учебник соответствует Федеральному
государственному образовательному стандарту

Москва
«Русское слово»
2017

УДК 373.167.1:51*07(075.3)
ББК 22.1я721
К59

Козлов В.В., Никитин А.А.

К59 Математика: алгебра и геометрия: учебник для 7 класса общеобразовательных организаций / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов, А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.В. Фокин; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. — 3-е изд. — М.: ООО «Русское слово — учебник», 2017. — 384 с. — (Инновационная школа).

ISBN 978-5-00092-930-8

УДК 373.167.1:51*07(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-00092-930-8

Предисловие

Данная книга — третья в серии трёхуровневых учебников по математике, созданных коллективом авторов из числа научных сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Института педагогических исследований одарённости детей Российской академии образования, профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета.

Эта серия разрабатывается с 1993 года и охватывает весь курс школьной математики с 5 по 11 класс. За прошедшие годы авторами сформирована цельная концепция преподавания математики в средней школе, которая во многом принципиально отличается от большинства других подобных разработок.

Прежде всего авторы отказались от традиционного деления математики на несколько дисциплин: арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, основы анализа и так далее. Все перечисленные предметы предлагается изучать в общем курсе. Это подчёркивает единство математической науки, тесную взаимосвязь развиваемых в ней идей и методов, фундаментальную роль математики как важного элемента общей культуры.

Потребности использования математики в различных областях человеческой деятельности различны, так же как различны и природные различия в склонностях и способностях учащихся, поэтому не всем учащимся математика нужна в одинаковом объёме. В настоящем учебнике приняты три уровня изложения, отличающиеся не только объёмом, но, главным образом, глубиной и сложностью изучаемого материала. Первый уровень содержит сведения, умения и навыки, необходимые каждому культурному человеку. Второй уровень предполагает изучение математики в объёме, достаточном для последующего обучения в техническом вузе. Наконец, третий уровень должен способствовать подготовке к продолжению образования на математическом факультете университета. Материал первого уровня может изучаться независимо от второго и третьего, а материал второго не зависит от изучаемого на третьем уровне. Разделы, относящиеся ко второму уровню, отмечены в тексте звёздочкой, а материал третьего уровня — двумя звёздочками.

Учебник состоит из 14 глав, разбитых на параграфы, которые делятся на более мелкие разделы — пункты. К каждому параграфу предлагаются контрольные вопросы, задачи, упражнения и тесты, а к каждому пункту — подходящий «открытый вопрос». Наличие открытых вопросов — важная особенность изложения учебного материала. Фактически эти вопросы — специальные темы для размышления и обсуждения. Ответы на них не всегда однозначны. Более того, иногда сознательно предполагается, что существует несколько различных правильных ответов. Многие из них можно найти на страницах учебника, а в некоторых случаях их подсказывает окружающая действительность. Часто именно ответ на открытый вопрос дополняет материал пункта до логического завершения.

Учебник прошёл апробацию в школах нескольких регионов, получил положительные экспертные заключения РАН и РАО, рекомендован Министерством образования и науки Российской Федерации.

Авторы выражают искреннюю признательность академику РАО В.Д. Шадрикову, принимавшему активное участие в разработке концепции многоуровневого обучения. Авторы благодарят докторов физико-математических наук М.П. Вишневского и А.И. Саханенко за участие на первоначальном этапе в формировании содержания трёхуровневого обучения.

Авторы считают также своим долгом вспомнить коллег, которых уже нет с нами, — доцента В.В. Войтишека, профессора Т.И. Зеленяка и профессора Д.М. Смирнова.

Глава 1

УГЛЫ

В этой главе рассматриваются углы, образованные двумя лучами, и связанные с ними плоские углы, способы измерения углов, напоминается основное свойство градусной меры.

§ 1. УГЛЫ, ПЛОСКИЕ УГЛЫ

1.1. Угол, образованный двумя лучами. Рассмотрим на плоскости два различных луча OA и OB с началом в точке O, как на рис. 1. Напомним, что такую геометрическую фигуру называют углом AOB. Точка O называется *вершиной* угла, а лучи OA и OB называются его *сторонами.* Для краткого обозначения угла используют знак $\angle$.

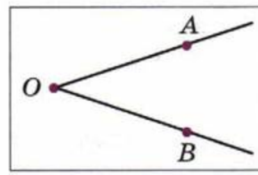


Рис. 1

Угол — это фигура, образованная двумя лучами с общим началом.

Коротко можно сказать: *«угол — это два луча с общим началом»*.

Примеры углов изображены на рис. 1 и 2: $\angle AOB$, $\angle ABC$.

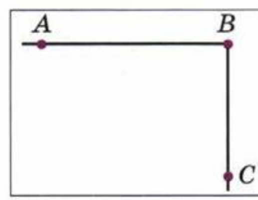


Рис. 2

Вопрос. Как ещё можно обозначить угол на рис. 2?

1.2. Плоский угол. Любой угол делит плоскость на две части, представление о которых дают рис. 3 и 4.

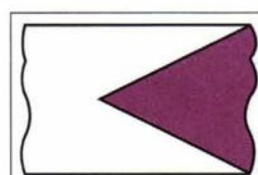


Рис. 3

Плоский угол — это часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общей вершиной.

Оба луча, ограничивающие плоский угол, называют *границей* этого плоского угла.

Закрашенные части плоскости на рис. 3 и 4 являются плоскими углами. Для обозначения плоского угла используют тот же знак $\angle$, что и для обозначения угла, образованного двумя лучами. Какой из двух плоских углов при этом рассматривается, обычно поясняют дополнительно. Если по-

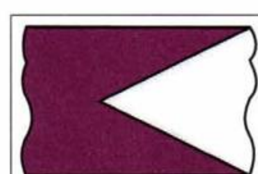


Рис. 4

яснения отсутствуют, то принято считать, что имеется в виду меньший из двух плоских углов, то есть целиком лежащий в одной из полуплоскостей, на которые разделится плоскость при продолжении любой из сторон данного угла до целой прямой.

Иногда вместо слов «плоский угол», если это не приводит к недоразумениям, говорят коротко «угол».

Однако надо иметь в виду, что угол как фигура, образованная двумя лучами с общим началом, и угол как одна из двух соответствующих частей плоскости — разные геометрические фигуры.

Вопрос. В чём разница между углом, образованным двумя лучами с общим началом, и плоским углом, ограниченным этими же двумя лучами?

1.3. Развёрнутый угол и полуплоскость. Будем говорить, что луч OA является *продолжением* луча OB до прямой AB, если лучи OA и OB образуют прямую. При этом лучи OA и OB называют *противоположными* и кратко говорят: «Луч OA является продолжением луча OB до прямой».

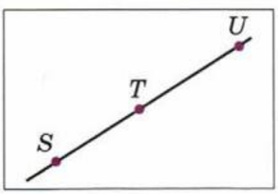


Рис. 5

Заметим теперь, что определению угла удовлетворяет фигура, образованная противоположными лучами TS и TU одной и той же прямой, как на рис. 5. Этот угол STU называется *развёрнутым* углом. В этом случае получаем два плоских развёрнутых угла, изображённых на рис. 6 и 7.

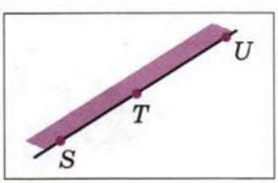


Рис. 6

Заметим, что каждый развёрнутый угол расположен в полуплоскости с границей, содержащей стороны этого угла.

Вопрос. Чем отличается развёрнутый плоский угол от полуплоскости?

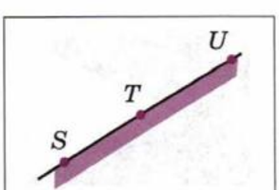


Рис. 7

1.4. Сумма двух плоских углов. Пусть плоский угол составлен из двух частей: плоского угла AOC и плоского угла COB, как на рис. 8. Тогда плоский угол AOB называется *суммой* плоских углов AOC и COB. Заметим, что для лучей OA, OC и OB можно рассмотреть и другие плоские углы, например, как на рис. 9. В этом случае плоский угол AOC является суммой углов COB и BOA.

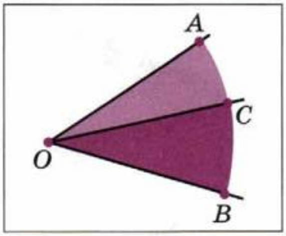


Рис. 8

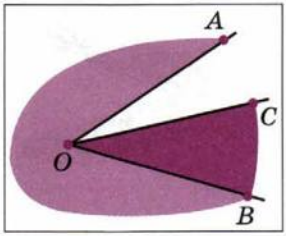


Рис. 9

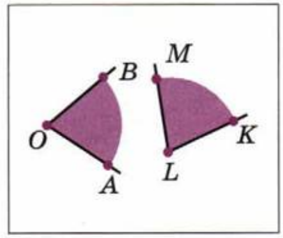


Рис. 10

Плоский угол, составленный из двух плоских углов, общие точки которых принадлежат только границам углов, называется суммой этих двух плоских углов.

Аналогично можно рассматривать плоский угол, который является суммой двух плоских углов, один из которых сам является суммой некоторых двух плоских углов. В этом случае говорят, что рассматриваемый плоский угол является суммой трёх плоских углов. Точно так же можно рассматривать плоские углы, которые являются суммой четырёх плоских углов и так далее.

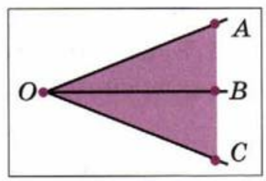


Рис. 11

Вопрос. В каком случае плоский угол является суммой шести плоских углов?

1.5. Биссектриса плоского угла. Напомним введённое ранее понятие равенства углов. На рис. 10 плоский угол AOB равен плоскому углу KLM, потому что если сделать копию плоского угла AOB, то эту копию можно совместить с углом KLM.

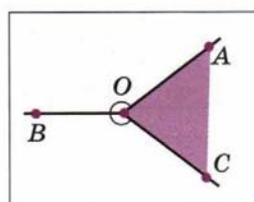


Рис. 12

На рис. 11 плоский угол AOB равен плоскому углу BOC. В этом случае угол AOC равен сумме двух равных плоских углов.

Поэтому можно сказать, что луч OB делит угол AOC на два равных угла BOA и COB.

Напомним, что луч OB называют *биссектрисой* угла AOC.

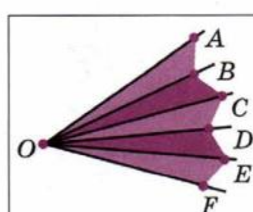


Рис. 13

На рис. 12 луч OB является биссектрисой того плоского угла AOC, который содержит этот луч.

Вопрос. Для каких углов на рис. 13 луч OD является биссектрисой, если угол AOF является суммой пяти равных углов: $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$?

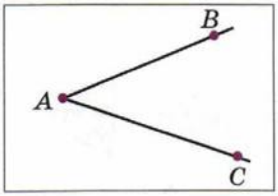


Рис. 14

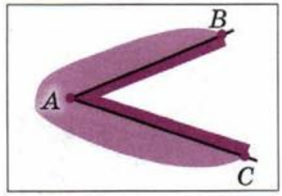


Рис. 15

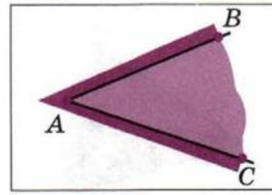


Рис. 16

1.6. Углы между отрезками. Рассмотрим два отрезка AB и AC с общим концом A. Напомним, что *углом между отрезками* AB и AC с общим концом A называется угол между лучами AB и AC (рис. 14).

Точку A называют *вершиной угла* BAC, отрезки AB и AC называют сторонами угла BAC и говорят, что угол BAC образован отрезками AB и AC.

Заметим, что в случае угла между отрезками также можно рассматривать плоские углы либо как на рис. 15, либо как на рис. 16.

Вопрос. Сколько плоских углов образуют диагонали квадрата с его сторонами?

1.7. Внутренние углы треугольника. Если задан треугольник ABC, то *внутренним углом треугольника* между сторонами AB и AC называют плоский угол, образованный отрезками AB и AC, содержащий треугольник ABC (см. рис. 17). Аналогично определяются внутренние углы BCA и ABC (см. рис. 18 и 19).

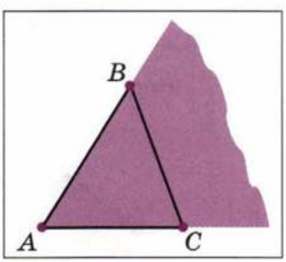


Рис. 17

Внутренние углы многоугольника определяются сложнее, чем внутренние углы треугольника. Хотя, например, для прямоугольника можно сказать, что внутренний угол прямоугольника — это плоский угол, образованный его сторонами и содержащий этот прямоугольник (рис. 20).

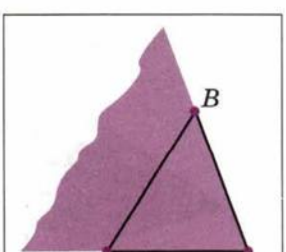


Рис. 18

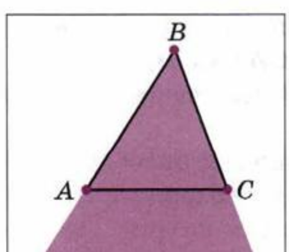


Рис. 19

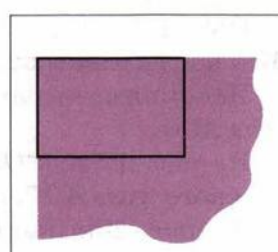


Рис. 20

Точно так же определяются внутренние углы ромба и параллелограмма.

Вопрос. Сколько плоских углов образуют все пары соседних сторон четырёхугольника?

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое угол?

2. Что такое плоский угол?

3. Какая фигура называется развёрнутым углом?

4. Что называется вершиной и стороной угла?

5. Что называется вершиной и стороной плоского угла?

6. Какой угол называется углом между отрезками с общим концом?

7. Что называется вершиной и стороной угла, образованного двумя отрезками с общей вершиной?

8. Что такое внутренний угол треугольника?

9. Что называют биссектрисой плоского угла?

Задачи и упражнения

1. Сколько углов разного вида образуют стороны треугольника?

2. Сколько неразвёрнутых углов разного вида вы можете указать на рис. 21?

3. Сколько всего плоских углов вы можете указать на рис. 21?

4. Сколько внутренних плоских углов имеет:

а) квадрат; б) прямоугольник;

в) ромб; г) параллелограмм?

5. Сколько плоских углов образуют все пары соседних сторон четырёхугольника?

6.** Сколько плоских углов образуют все пары соседних сторон многоугольника с n сторонами?

7. Сколько всего развёрнутых углов вы можете указать на рис. 22?

8.** Сколько всего плоских неразвёрнутых углов вы можете указать на рис. 23?

9.** Сколько развёрнутых углов образуют часовая и минутная стрелки за 12 часов?

10.** Сколько неразвёрнутых углов образуют 100 прямых, пересекающихся в одной точке?

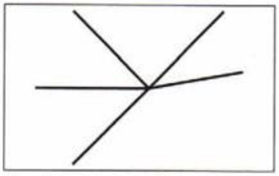


Рис. 21

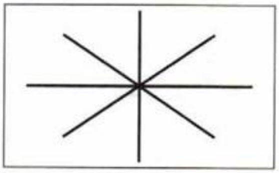


Рис. 22

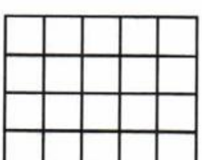


Рис. 23

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

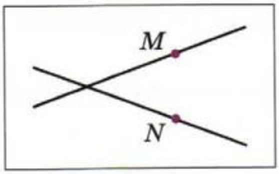


Рис. 24

1.1. На рис. 24 изображены две прямые, на каждой из которых выбраны по одной точке M и N соответственно. Сколько развёрнутых плоских углов можно указать на этом рисунке, выбирая в качестве вершин либо точку M, либо точку N?

1) 8; 2) 4; 3) 2; 4) 0.

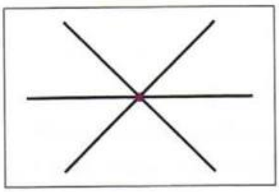


Рис. 25

1.2. Три прямые расположены так, как на рис. 25, то есть имеют одну общую точку. Сколько неразвёрнутых углов можно указать на этом рисунке?

1) 8; 2) 12; 3) 24; 4) 32.

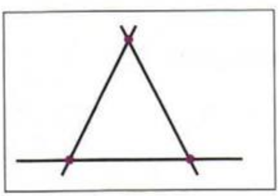


Рис. 26

1.3. На рис. 26 изображены три прямые и три точки их пересечения. Сколько всего развёрнутых углов можно указать на рисунке с вершинами в точках пересечения?

1) 3; 2) 6; 3) 9; 4) 12.

1.4. Сколько внутренних углов имеет правильный 50-угольник?

1) 25; 2) 50; 3) 100; 4) 150.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответов.

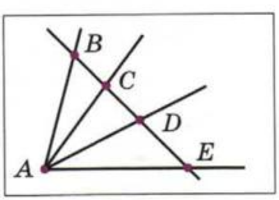


Рис. 27

2.1. На рис. 27 рассматриваются плоские углы меньше развёрнутого. Какие из указанных плоских углов содержат плоский угол DAC?

1) $\angle EAB$; 2) $\angle CAE$;
3) $\angle ADE$; 4) $\angle ADB$.

2.2. Суммой каких углов является угол EAC на рис. 27?

1) $\angle EAC$ и $\angle EAD$; 2) $\angle DAE$ и $\angle DAC$;
3) $\angle EAD$ и $\angle DAC$; 4) $\angle CAD$ и $\angle ADC$.

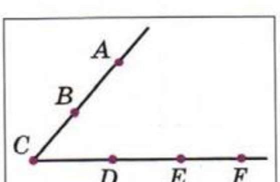


Рис. 28

2.3. На рис. 28 изображён угол с вершиной C. Какие из приведённых записей не являются обозначениями этого угла?

1) $\angle FCA$; 2) $\angle FDA$;
3) $\angle EDC$; 4) $\angle DKA$.

2.4. Даны прямая AC и два луча, выходящие из точки B, как на рис. 29. Суммы каких углов дают развёрнутый угол?

1) $\angle ABC$ и $\angle CBE$; 2) $\angle DBA$ и $\angle DBE$;
3) $\angle CBD$ и $\angle ABD$; 4) $\angle ABE$ и $\angle DBC$.

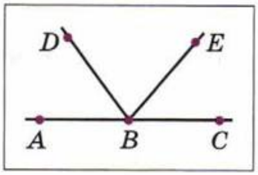


Рис. 29

§ 2. ВЕЛИЧИНА ПЛОСКОГО УГЛА

2.1. Градусная мера плоских углов. Напомним, что в 5 классе мы определяли градусную меру углов, образованных двумя лучами. При этом отмечали, что градусная мера обладает следующими свойствами:

1) Каждому углу соответствует его градусная мера.

2) Если два угла равны, то они имеют одну и ту же градусную меру.

3) Если два угла имеют одну и ту же градусную меру, то эти углы равны.

Вопрос. Могут ли неравные углы иметь одинаковую градусную меру?

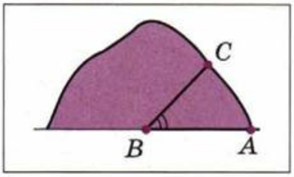


Рис. 1

2.2. Градусная мера плоского угла, содержащегося в полуплоскости. Два различных луча с общим началом образуют два плоских угла. При этом всегда один из этих плоских углов расположен в некоторой полуплоскости. Например, изображённый на рис. 1 плоский угол ABC содержится в выделенной полуплоскости с границей BA.

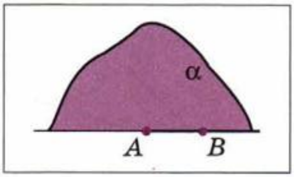


Рис. 2

С другой стороны, возьмём любой луч AB. Рассмотрим содержащую его прямую a и полуплоскость α с границей a (рис. 2).

Проведём в полуплоскости α различные лучи AC, AD, AE с началом в точке A, как на рис. 3. Измерим плоские углы BAC, BAD, BAE, содержащиеся в полуплоскости α. Получим различные значения в диапазоне от $0°$ до $180°$.

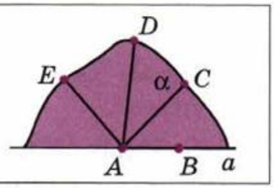


Рис. 3

Имеет место следующее свойство: **от любого луча, лежащего на границе данной полуплоскости, в этой полуплоскости можно отложить плоский угол любой заданной величины от 0° до 180°.**

Вопрос. Почему от любого луча можно отложить только два различных угла величины 90°?

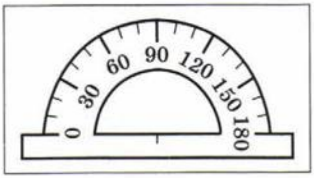


Рис. 4

2.3. Транспортир. Напомним, что для практического измерения углов служит транспортир (рис. 4), с помощью шкалы которого можно определить численное значение градусной меры угла. Так, величина угла на рис. 5 равна 60°, а величина угла на рис. 6 равна 120°.

Отсчёт градусов на транспортире можно производить как по часовой, так и против часовой стрелки. С помощью транспортира можно найти величину угла только приближённо.

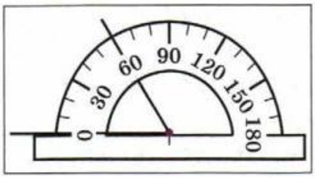


Рис. 5

Вопрос. Чем отличается угол от величины угла?

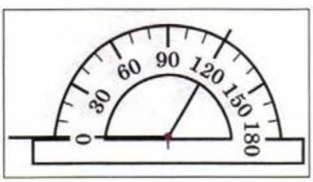


Рис. 6

2.4. Градусная мера суммы двух углов и её свойство. Рассмотрим на рис. 7 лучи BA, BD и BC с общей вершиной A.

Плоский угол ABC равен сумме плоских углов ABD и DBC:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC.$$

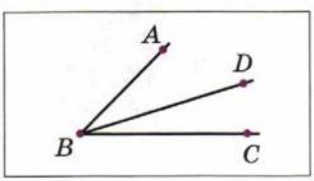


Рис. 7

С помощью транспортира измерим углы ABD, DBC, ABC и предположим, что их градусные меры равны $\alpha°$, $\beta°$, $\gamma°$ соответственно. В результате для градусных мер получится равенство

$$\gamma° = \alpha° + \beta°.$$

Это равенство можно записать в следующей формулировке:

Градусная мера суммы плоских углов равна сумме градусных мер слагаемых.

Это свойство называется *основным* свойством градусной меры.

Вопрос. Как представить развёрнутый угол в виде суммы двух равных углов?

2.5. Измерение плоских углов. Ситуация с измерением углов напоминает ситуацию с измерением отрезков. Для измерения углов сначала выберем единицу измерения — *эталонный* угол.

После выбора единицы измерения углов любому плоскому углу соответствует определённое численное значение: это число показывает, сколько нужно взять эталонных углов и частей эталонных углов, чтобы в сумме получить этот угол.

Выбор некоторого плоского угла в качестве единичного позволяет для любого плоского угла указать подходящее число, называемое величиной этого угла; это число показывает, сколько эталонных углов или их частей надо сложить, чтобы получить данный угол.

Для каждой единицы измерения углов справедливы свойства:

1) Равные углы имеют равные величины.

2) Углы, имеющие равные величины, равны между собой.

Ранее, когда было ясно, что речь идёт о величинах углов, использовалось обозначение $\angle$. Иногда, чтобы отличать от обозначения самого угла, величину угла обозначают другим знаком — $\measuredangle$.

Например, если OB является биссектрисой угла AOC (рис. 8), а плоский угол AOB взять в качестве эталона (единицы измерения), то можно записать равенства:

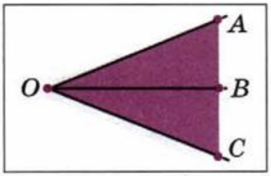


Рис. 8

$\measuredangle AOB = 1$ (единица измерения); $\measuredangle AOC = 2$ (единицы измерения).

Пусть $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$ (рис. 9) и в качестве единицы измерения взят $\angle AOB$.

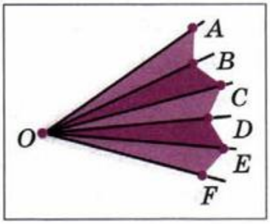


Рис. 9

Тогда $\measuredangle AOB = 1$, $\measuredangle AOD = 3$, $\measuredangle AOE = 4$.

В свою очередь, если в качестве единицы измерения взять угол AOF, то $\measuredangle AOB = \frac{1}{5}$, $\measuredangle AOD = \frac{3}{5}$, $\measuredangle AOE = \frac{4}{5}$.

При указании величины плоского угла слова «величина» и «плоского» часто не пишутся. Вместо слов «величина плоского угла равна 5 градусам» можно сказать или написать «плоский угол в 5 градусов» или «угол в 5 градусов».

При замене единицы измерения изменяется и численное значение, хотя сам угол остаётся прежним.

Вопрос. Как на практике сравнить два плоских угла?

2.6. Величина прямого угла как единица измерения плоских углов. Напомним, что в прошлом мореходы обозначали основные направления

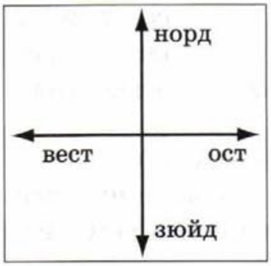


Рис. 10

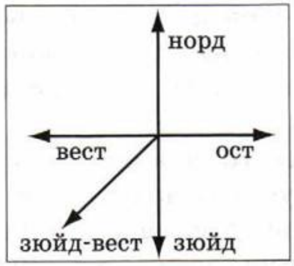


Рис. 11

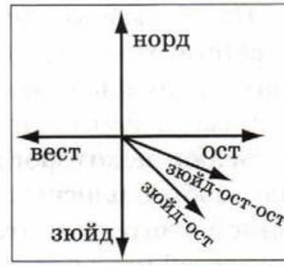


Рис. 12

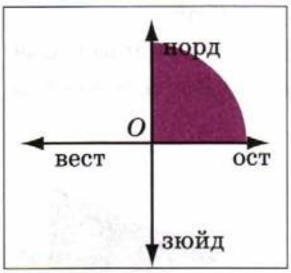


Рис. 13

движения словами: «норд» — север, «зюйд» — юг, «ост» — восток, «вест» — запад (рис. 10).

Промежутки между этими направлениями делили пополам и новые направления называли двумя словами, например, «зюйд-вест» (рис. 11). Полученные промежутки ещё раз делили пополам и новые направления называли тремя словами (рис. 12). Новые промежутки ещё раз делили пополам и маленькую единицу деления называли «румбом».

Выберем угол между лучами, определяемыми направлениями «норд» и «ост» (как закрашено на рис. 13), за единицу измерения углов.

Эту единицу измерения обычно называют *прямым* углом, а его величину обозначают через d. Тогда угол между лучами, определяющими направления «ост» и «зюйд», равен d.

Так как прямой угол равен восьми румбам, то один румб равен $\frac{1}{8}d$. Развёрнутый угол равен двум прямым углам или $2d$.

Вопрос. Какую часть прямого угла составляет угол между лучами, определяющими направления зюйд-зюйд-вест и зюйд-ост-ост?

$1d = 90^\circ$
$1^\circ = 60'$
$1' = 60''$

2.7. Угловой градус, угловая минута, угловая секунда. Разделим прямой угол на 90 равных частей. Угол, который равен одной девяностой части прямого угла, называют *угловым градусом* и его величину обозначают 1°.

Угол, величина которого равна одной шестидесятой части углового градуса, называют *угловой минутой* и его величину обозначают через $1'$. Знак $'$ угловой минуты пишут справа вверху от числа.

$$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$$

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

$$1^\circ = \left(\frac{1}{90}\right)d$$

Угол, величина которого равна одной шестидесятой части угловой минуты, называют *угловой секундой* и его величину обозначают через $1''$. Знак угловой секунды $''$ пишут справа вверху от числа.

Таким образом, $1^\circ = 60' = 3600''$.

Если из текста ясно, что речь идёт об измерениях плоских углов, то вместо слов «угловой градус», «угловая минута», «угловая секунда» обычно говорят или пишут «градус», «минута», «секунда».

Вопрос. Сколько угловых секунд содержит прямой угол?

2.8. Нулевой угол. Напомним два определения для плоских углов, меньших развёрнутого угла.

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие являются противоположными лучами одной прямой.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного из них являются продолжениями (то есть противоположными лучами) сторон другого.

Заметим, что вертикальные углы являются смежными к одному и тому же углу. Обратно: углы, смежные к одному и тому же углу, являются вертикальными.

Из определения развёрнутого угла следует, что сумма смежных углов имеет величину, равную 180°, а величины вертикальных углов равны.

Иногда отдельно вводят *нулевой угол* — угол, смежный к развёрнутому. Нулевой угол имеет величину в 0°, и этот угол образован двумя совпадающими лучами. При любой единице измерения углов величина нулевого угла равна нулю. Например, можно считать, что нулевой угол равен либо 0°, либо $0'$, либо $0''$.

Заметим, что угол, стороны которого не совпадают, имеет градусную меру большую, чем 0°.

Вопрос. Чему равна градусная мера угла, смежного к углу, величина которого α°?

2.9. Дуги окружности и плоские углы. Рассмотрим окружность с центром O и некоторый плоский угол AOB с вершиной O (рис. 14). Этот угол содержит дугу данной окружности. Будем считать эту дугу соответствующей плоскому углу AOB.

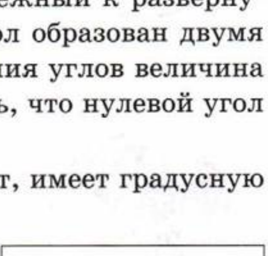


Рис. 14

Для любых углов с общей вершиной O и для дуг этой окружности выполняются свойства:

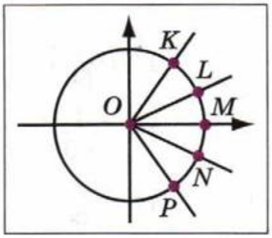


Рис. 15

1) Если плоские углы равны, то равны и дуги окружности, принадлежащие соответствующим плоским углам.

2) Если дуги, принадлежащие плоским углам, равны, то и плоские углы равны.

Например, если на рис. 15 угол KOM равен углу MOP, то дуга KLM равна дуге MNP. И наоборот, если дуга KLM равна дуге MNP, то угол KOM равен углу MOP.

Вопрос. Какую часть окружности образуют дуги, принадлежащие двум смежным углам с вершиной в центре окружности?

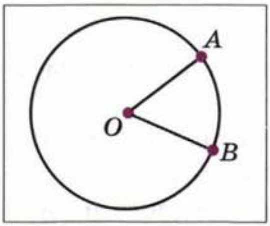


Рис. 16

2.10. Дуги окружности и углы между её радиусами. Рассмотрим произвольную окружность радиуса r с центром O. Тогда любые два радиуса OA и OB определяют некоторое разбиение окружности на две части (рис. 16).

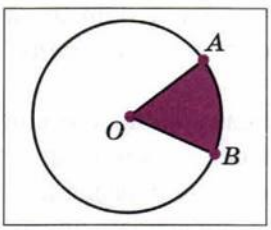


Рис. 17

С другой стороны, каждой из частей соответствует плоский угол, определяемый лучами OA и OB. Если будем двигаться по окружности по часовой стрелке от точки A к точке B, то получим один угол (рис. 17). Если двигаться от точки A к точке B против часовой стрелки, то получим другой угол (рис. 18).

Если окружность разделить на 2 равные части, то получатся две дуги окружности, соответствующие развёрнутому углу. Каждая такая дуга является полуокружностью.

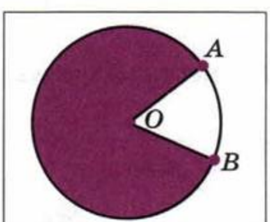


Рис. 18

Если окружность разделить на 4 равные части, то получатся четыре дуги окружности, каждая из которых соответствует прямому углу.

Если окружность разделить на 360 равных частей, то получатся 360 дуг окружности, каждая из которых соответствует одному угловому градусу.

Вопрос. На сколько равных частей нужно разделить окружность, чтобы получить дугу окружности, соответствующую углу в $1''$?

2.11. Радиан как единица измерения плоских углов.**

«π» читается «пи»

Пусть задана окружность с центром O и два таких радиуса OA и OB, что длина дуги AB равна радиусу OA (рис. 19). В этом случае говорят, что величина плоского угла AOB равна одному *радиану*. Если окружность имеет радиус r, то длина окружности имеет длину $2\pi r$, где $\pi = 3{,}1415...$ — это число, показывающее, во сколько раз длина окружности больше длины удвоенного радиуса. С учётом этого получаем, что величина развёрнутого угла равна π радиан, прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ радиан, один угловой градус равен $\frac{\pi}{180}$ радиан.

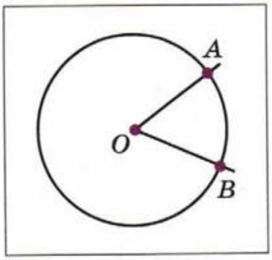


Рис. 19

Вопрос. Какую часть радиана содержит одна угловая секунда?

2.12.* Измерение плоских углов, бóльших развёрнутых. Измеряя плоские углы, мы до сих пор предполагали, что измеряемый угол расположен в некоторой полуплоскости, то есть не больше развёрнутого угла. Однако можно измерять углы и бóльшие развёрнутого.

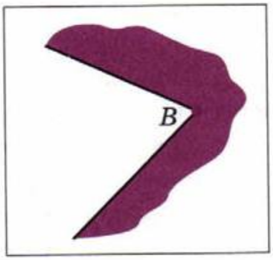


Рис. 20

Пусть, например, нужно измерить в градусах плоский угол с вершиной B, изображённый на рис. 20. Построим вспомогательную окружность с центром в точке B, пересекающую стороны угла в точках A и C (рис. 21). Если эту окружность разобьём на дуги, соответствующие одному градусу, то получим, что всей окружности соответствует 360°. А это означает, что если мера меньшего из плоских углов, образованных лучами BA и BC, равна $\alpha°$, то мера большего угла равна $360° - \alpha°$.

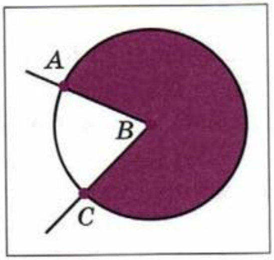


Рис. 21

Таким образом, мы получаем возможность измерять любой плоский угол, причём градусная мера плоского угла может быть любой в пределах от 0° до 360°.

Вопрос. Как изображается плоский угол величиной в 270°?

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите основные свойства градусной меры угла.
2. Как определяется угол величиной в 0°?
3. Чему равна градусная мера развёрнутого угла?
4. Чему равна градусная мера суммы плоских углов?
5. Как измеряются углы с помощью эталонного угла?

6. Как измеряются углы с использованием прямого угла в качестве эталона?

7. Как определяется угловая минута?

8. Как определяется угловая секунда?

9. Как устанавливается соответствие между дугами окружности и плоскими углами с вершиной в центре окружности?

10.** Как определяется радиан?

Задачи и упражнения

1. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольник $ABCD$ и измерьте его углы.

2. Изобразите плоский угол. С помощью транспортира нарисуйте биссектрису этого угла.

3. Изобразите плоский угол. С помощью транспортира разделите этот угол на три равных угла.

4. Изобразите плоский угол. С помощью транспортира разделите этот угол на 5 равных углов.

5. С помощью транспортира нарисуйте угол: а) в 1 румб; б) в 3 румба; в) в 1,5 румба.

6. Какой угол образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают: а) 5 часов; б) 8 часов; в)* 2 часа 30 минут; г)* 7 часов 30 минут; д)** k часов m минут, где k — некоторое натуральное число от 1 до 12, а m — некоторое натуральное число от 1 до 60?

7. Нарисуйте прямоугольник $ABCD$. Выберите внутри его точку M. Измерьте углы AMB, BMC, CMD, DMA и найдите сумму полученных значений. На сколько ваша сумма отличается от $360°$?

8. Нарисуйте ромб. Измерьте все его углы и найдите сумму полученных значений. На сколько ваша сумма отличается от $360°$?

9.** Из бумаги вырезан угол в $19°$. Как с помощью этого угла изобразить угол в $1°$?

10.** Предположим, что угол между стрелками часов измеряется в градусах по ходу часовой стрелки от часовой до минутной стрелки. Чему равен угол между стрелками, когда часы показывают: а) 8 часов 15 минут; б) 2 часа 15 минут; в) 7 часов 45 минут; г) 2 часа 5 минут?

11.** Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки часов совпадают, если считать, что первое совпадение происходит в 0 часов, а последнее — в 24 часа?

12. Выразите в радианах следующие углы:

а) $60°$; б) $45°$; в) $15°$; г) $135°$; д) $18°$; е) $72°$.

13. Сколько угловых минут содержит угол: а) в 3°; б) в 5°; в) в 45°?

14. Сколько угловых секунд содержит угол : а) в $3'$; б) в 10°; в) в $19'$?

15.** Выразите в градусах следующие углы:

а) в $\frac{\pi}{3}$ радиан; б) в $\frac{\pi}{4}$ радиан; в) в $\frac{\pi}{18}$ радиан.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.* Плоский угол в 5° — это:

1) угол в $\frac{\pi}{5 \cdot 180}$ радиан; 2) угол в $3600''$;

3) угол в $300'$; 4) угол в $360'$.

1.2. Биссектриса половины развёрнутого угла делит этот угол на:

1) два угла в 30°; 2) два угла в 90°;

3) два угла в 15°; 4) два угла в 45°.

1.3. Какую часть от половины развёрнутого угла составляет угол в $1{,}8^\circ$?

1) $\frac{1}{200}$; 2) $\frac{1}{100}$; 3) $\frac{1}{50}$; 4) $\frac{1}{10}$.

1.4. Угол в $36000''$ равен:

1) углу $3600'$; 2) углу в 36°;

3) углу в 30°; 4) углу в 10°.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа из заданных.

2.1.** Плоский угол в 90° — это:

1) угол в π радиан; 2) развёрнутый угол;

3) прямой угол; 4) угол в $\frac{\pi}{2}$ радиан.

2.2.** Плоский угол в $\frac{\pi}{3}$ радиан — это:

1) угол в 90°; 2) угол в 60°; 3) угол в $3600'$; 4) угол в $3600''$.

2.3. Биссектриса угла в 45° делит его на углы в:

1) $32{,}5^\circ$; 2) $20^\circ + 150'$; 3) $15^\circ + 250'$; 4) $1200' + 9000''$.

2.4. На рис. 22 изображено несколько углов с общей вершиной O, причём $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE$. Какие из следующих равенств имеют место?

1) $\angle AOC = \angle COE$; 2) $\angle BOE = \angle COA$;

3) $\angle DOA = \angle BOE$; 4) $\angle DOC = \angle COB$.

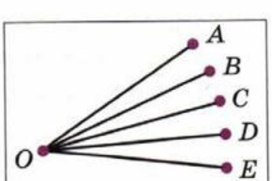


Рис. 22

Глава 2

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В этой главе напоминается о степени числа, рассматриваются основные свойства степени и показывается, как понятие степени обобщается на случай целых и некоторых других показателей.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1.1. Степень с натуральным показателем. Для сокращения записи суммы нескольких одинаковых чисел используют операцию умножения. Например, $3 \cdot 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$. Чтобы сократить запись произведения нескольких одинаковых чисел, это число записывают только один раз, а сверху справа указывают количество этих одинаковых сомножителей в произведении. Например, $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$, то есть 243 представлено в виде степени числа 3.

Можно сказать, что 243 записывается в виде *степени* числа 3. При этом число 3 называют *основанием степени*, а число 5 называют *показателем степени*.

Аналогично — число 1 000 000 можно записать в виде 10^6. В этом случае число 10 — основание степени, а число 6 — показатель степени.

Заметим, что $1024 = 2^{10}$. В этом случае число 2 — основание степени, число 10 — показатель степени.

Заметим, что число -2187 можно представить в виде произведения:

$$(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = (-3)^7.$$

В этом случае основанием степени является число -3.

Для числа 1 000 000 возможна также запись

$$(-10)(-10)(-10)(-10)(-10)(-10) = (-10)^6,$$

то есть число -10 можно взять основанием степени, и в этом случае число 1 000 000 представляется в виде шестой степени числа -10.

Таким образом, приходим к определению:

Для натурального числа $n > 1$ произведение n одинаковых сомножителей, равных a, называется n-й степенью числа a и обозначается через a^n.

Также, по определению, для удобства считают, что степень числа a с показателем, равным 1, равна a, то есть

$$a^1 = a.$$

Число a^n иногда называют степенью числа a с натуральным показателем n. Иногда говорят, что a^n — это n-я степень числа a, или «a в степени n», или «a в n-й степени», или «a в n-й». Например, о числе 2^{10} можно сказать, что это два в десятой степени, а можно сказать, что это два в степени десять или два в десятой.

$$(-2)^3 = -8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{8}{125}$$

$$(0{,}2)^4 = 0{,}0016$$

$$0^{100} = 0$$

Вопрос. Что означает запись $((-3)^1)^{100}$?

1.2. Определение степени, если известна степень с предыдущим показателем. При $n = 1$, по определению, $a^1 = a$.

Если теперь для числа a и натурального числа k определено число a^k, то принимаем, по определению, что $a^{k+1} = a^k \cdot a$.

Например, $10^7 = 10^6 \cdot 10$, $10^8 = 10^7 \cdot 10$ и так далее.

Таким образом, для любого числа a и любого натурального числа n мы определили число a^n.

Вопрос. Чему равно произведение чисел, одно из которых равно трём в девяносто девятой степени, а другое равно трём в степени сто один?

1.3.* Последовательность степеней. Рассмотрим натуральные числа 1, 2, 3 и так далее. Выбирая эти числа показателями при основании 2, получим *последовательность* степеней числа 2:

$$2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, 2^{n+1}, \ldots .$$

Также можно взять любое число a и рассмотреть последовательность

$$a^1, a^2, a^3, \ldots, a^n, a^{n+1}, \ldots$$

степеней числа a с натуральными показателями.

Вопрос. На каком месте в последовательности всех степеней числа 5 с натуральными показателями находится число 3125?

1.4. Названия для второй и третьей степени. Вы знаете, что для степеней числа a с показателем 2 и показателем 3 существуют отдельные названия, пришедшие к нам ещё от древних греков. Так, число a^2 называют «a-квадрат», или «a в квадрате», или «квадрат числа a»; число a^3 называют «a-куб», или «a в кубе», или «куб числа a».

Эти названия объясняются так:

число a^2 равно значению площади квадрата, сторона которого равна a;

число a^3 равно значению объёма куба, ребро которого равно a.

Для отрицательных чисел геометрической аналогии с кубами и квадратами нет. Однако можно сказать, что, например, число 9 равно числу

(-3) в квадрате, поскольку $9 = (-3)^2$. Аналогично число -125 равно числу (-5) в кубе, поскольку $-125 = (-5)^3$.

Вопрос. Как вы будете находить число, равное кубу числа (-4) в квадрате?

1.5. Логарифм — название для показателя степени.** Рассмотрим число 2 и число 16, которое является четвёртой степенью числа 2, то есть $16 = 2^4$.

В этой записи число 2 является основанием степени, а число 4 — показателем степени.

Для основания 2 и числа 16 показатель степени 4 называют также *логарифмом числа* 16 *по основанию* 2 и используют запись

$$4 = \log_2 16.$$

Такое же соглашение принято и в других подобных случаях: если $a^n = b$, где $a > 0$, a не равно 1 и $b > 0$, то число n называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$.

Таким образом, верны равенства:

$$1 = \log_2 2, \quad 2 = \log_2 4, \quad 3 = \log_2 8.$$

Если возьмём основание, равное десятичной дроби 0,2, то

$$\log_{0,2} 0,2 = 1; \quad \log_{0,2} 0,008 = 3; \quad \log_{0,2} 0,00032 = 5.$$

Вопрос. Чему равен логарифм по основанию 10 от числа сто миллионов?

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое n-я степень числа a для натурального $n > 1$?

2. Как определяется число a в степени 1?

3. Как ещё можно последовательно определить натуральную степень числа?

4. Что такое основание степени?

5. Что такое показатель степени?

6. Что такое квадрат и куб числа?

7. Как вы понимаете квадрат и куб отрицательного числа?

8.** Что такое логарифм числа a^n по основанию a?

Задачи и упражнения

1. Запишите числа, равные степеням:

а) числа 2 с натуральными показателями от 10 до 20;

б) числа 3 с натуральными показателями от 1 до 10;

в) числа 5 с натуральными показателями от 1 до 6.

2. Запишите в виде некоторой степени с натуральным показателем, большим 1, числа:

а) 125; б) 289; в) 243; г) 256;

д) 729; е) 625; ё) 4096; ж) 1296.

3.* Найдите число x^{n+1}, если известно, что

а) $x = 2$ и $x^n = 1\,048\,576$; б) $x = 3$ и $x^n = 6561$;

в) $x = 7$ и $x^n = 16\,807$.

4.** Найдите значение выражения:

а) $\log_5 625$; б) $\log_7 343$; в) $\log_2 2048$; г) $\log_{\sqrt{5}} 5$; д) $\log_{\sqrt{2}} 4$.

5.** Найдите значение выражения:

а) $\log_4 2^6$; б) $\log_2 4^8$; в) $\log_{25} 5^{10}$; г) $\log_{49} 7^4$; д) $\log_{\sqrt{7}} 7^3$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен объём куба со стороной 7 см?

1) 303 см^3; 2) 333 см^3; 3) 343 см^3; 4) 353 см^3.

1.2. Чему равно произведение первых трёх чисел из последовательности степеней числа 2?

1) 54; 2) 64; 3) 74; 4) 84.

1.3. На каком месте в последовательности степеней числа 3 находится число, равное 27^3?

1) на шестом; 2) на восьмом; 3) на девятом; 4) на десятом.

1.4. На сколько 2^6 меньше 2^8?

1) на 2^2; 2) на 2^6; 3) на 2^7; 4) на $2^6 + 2^7$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. На какие цифры может заканчиваться степень числа 3?

1) на 3; 2) на 4; 3) на 5; 4) на 6.

2.2. Среди следующих чисел укажите числа, равные некоторым степеням числа 0,5:

1) 0,5; 2) 0,25; 3) 0,75; 4) 1.

2.3.** Значения каких из указанных выражений не равны 2?

1) $\log_9 27$; 2) $\log_3 27$; 3) $\log_{11} 121$; 4) $\log_{10} 10$.

2.4. Какие из указанных степеней числа $\frac{3}{6}$ больше 0,1?

1) $\left(\frac{3}{6}\right)^2$; 2) $\left(\frac{3}{6}\right)^3$; 3) $\left(\frac{3}{6}\right)^4$; 4) $\left(\frac{3}{6}\right)^5$.

§ 2. СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

2.1. Как умножаются степени с одинаковым основанием? Рассмотрим число 2^{10} и произведения степеней числа 2, сумма показателей степеней которых равна 10, например, $2^6 \cdot 2^4$ и $2^5 \cdot 2^5$. Числа 2^{10}, $2^6 \cdot 2^4$ и $2^5 \cdot 2^5$ являются произведениями 10 сомножителей, равных 2. Поэтому $2^6 \cdot 2^4 = 2^{10} = 2^{6+4}$ и $2^5 \cdot 2^5 = 2^{10} = 2^{5+5}$.

В общем случае имеет место *первое основное свойство степеней.*

Для любого числа a и любых натуральных значений m и n выполняется равенство:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Иногда это свойство формулируют так:

При умножении двух степеней с одинаковыми основаниями основание не меняется, а показатели степеней складываются.

В самом деле, число a^m состоит из m одинаковых сомножителей, равных a; число a^n — из n таких же сомножителей. Всего получается $m + n$ сомножителей, равных a, то есть a^{n+m}. Это рассуждение можно кратко записать в виде цепочки равенств:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n}.$$

Вопрос. Как показать, что $3^5 \cdot 3^6 \cdot 3^7 = 3^{18}$?

2.2. Правило возведения степени в степень. Степень числа также можно возводить в степень. Рассмотрим, например, число $(2^4)^3$. Это число по определению равно $2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4$, его можно записать также в виде $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$.

В результате видно, что число $(2^4)^3$ равно произведению $4 \cdot 3 = 12$ сомножителей, каждый из которых равен 2, то есть $(2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3}$.

В общем случае имеет место *второе основное свойство степеней.*

Для любого числа a и любых натуральных значений m и n выполняется равенство:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Это свойство можно сформулировать так:

При последовательном возведении в степень показатели степеней перемножаются.

Как и в предыдущем пункте, доказательство этого утверждения сводится к простому рассуждению:

$$(a^m)^n = \overbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m})}^{n \text{ групп множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \cdot n} = a^{m \cdot n}.$$

Вопрос. Как показать, что $(2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}$?

2.3. Степень произведения двух чисел. Рассмотрим степень произведения двух чисел. Например, возьмём число $(2 \cdot 3)^4$. Это число по определению равно $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)$, его можно записать также в виде $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$. В результате видно, что число $(2 \cdot 3)^4$ равно произведению чисел 2^4 и 3^4, то есть $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$.

В общем случае имеет место *третье основное свойство степеней*.

Для любых чисел a и b и любого натурального числа n выполняется равенство:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Это свойство можно сформулировать так:

***n*-я степень произведения двух чисел равна произведению *n*-х степеней сомножителей.**

Вопрос. Чему равно произведение чисел 2^{50} и 5^{50}?

2.4. Разные способы записи миллиона. Рассмотрим число миллион. Его можно записать по-разному. Например:

$$1\,000\,000 = 10^6.$$

Используя первое свойство степени, получим

$$10^6 = 10^{5+1} = 10^5 \cdot 10.$$

Используя второе свойство степени, получим

$$10^6 = (10^2)^3 = (10^3)^2.$$

Используя третье свойство степени, получим

$$10^6 = (2 \cdot 5)^6 = 2^6 \cdot 5^6.$$

Возможны и другие записи числа миллион, например:

$$10^6 = (2^3)^2 \cdot (5^2)^3 = 8^2 \cdot 25^3.$$

Использование основных свойств степени позволяет упрощать вычисление значений некоторых числовых выражений. Например:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^6 = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3};$$

$$(-2)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = ((-1)\cdot 2)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = (-1)^5 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = (-1)^5 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^5 = (-1)\cdot 1 = -1.$$

Вопрос. Чему равно значение $(-1)^{2m}$ при натуральном m?

2.5. Число, обратное степени. Возведём число $\frac{1}{2}$ в шестую степень:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{1}{2^6}.$$

Вообще, $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$, если $a \neq 0$. Чтобы доказать это соотношение, перемножим $\left(\frac{1}{a}\right)^n$ и a^n, воспользовавшись третьим основным свойством степеней: $\left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot a^n = \left(\frac{1}{a}\cdot a\right)^n = 1$. Таким образом, $\frac{1}{a^n}$ — число, обратное a^n, есть $\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Вопрос. Как показать, что для любого натурального числа n имеет место равенство $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$?

2.6. Степень отношения двух чисел. Рассмотрим отношение степеней двух чисел с равными показателями, например, $\frac{2^5}{3^5}$. Это число равно $\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}$, его можно записать также в виде $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

В общем случае выполняется следующее свойство отношения степеней с равными показателями:

Для любого числа a, ненулевого числа b и натурального числа n выполняется равенство:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Это свойство кратко формулируют так:

Степень отношения двух чисел равна отношению степени числителя к степени знаменателя.

Вопрос. Почему $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^n}$?

2.7. Запись свойств степеней с помощью логарифмов.** Запишем на языке логарифмов свойства степеней.

Рассмотрим равенство $2^m \cdot 2^n = 2^{n+m}$.

Логарифм левой части этого равенства запишется в виде $\log_2(2^m \cdot 2^n)$.

Логарифм правой части равенства по определению равен $n + m$. Следовательно, $\log_2(2^m \cdot 2^n) = n + m$.

Так как $m = \log_2(2^m)$ и $n = \log_2(2^n)$, то можем записать, что

$$\log_2(2^m \cdot 2^n) = \log_2(2^m) + \log_2(2^n).$$

При a, большем 0 и не равном 1, из равенства $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ следует, что

$$\log_a(a^m \cdot a^n) = \log_a(a^m) + \log_a(a^n),$$

из равенства $(a^m)^n = a^{mn}$ можно получить равенство

$$\log_a((a^m)^n) = n \cdot \log_a(a^m).$$

Вопрос. Что больше: $\log_3(3^{100})$ или $24 \cdot \log_5 5^4$?

2.8. Как искать последнюю цифру степени числа.** Найдём последнюю цифру в десятичной записи числа 3^{100}. Так как $3^{100} = 3^{2 \cdot 50} = (3^2)^{50} = 9^{50}$, будем искать последнюю цифру числа 9^{50}. Так как $9^{50} = 9^{2 \cdot 25} = (9^2)^{25} = (81)^{25}$, будем искать последнюю цифру числа 81^{25}.

В 5 классе вы узнали, что последняя цифра у произведения двух чисел такая же, как у произведения их последних цифр. Поэтому последняя цифра числа 81^{25} такая же, как и у числа 1^{25}, то есть 1. В результате приходим к тому, что последней цифрой числа 3^{100} является 1.

Вопрос. Чему равна последняя цифра числа 7^{99}?

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте первое основное свойство степени.

2. Сформулируйте второе основное свойство степени.

3. Сформулируйте третье основное свойство степени.

4. Сформулируйте свойство степени частного двух чисел.

5.** Запишите свойство логарифма для произведения двух степеней.

6.** Какие свойства логарифмов по основанию a для степеней числа a вы знаете?

7.** Докажите свойства степени.

Задачи и упражнения

1. Запишите в виде степени одного числа:

а) $3^{54} \cdot 3^6$; б) $7^{81} \cdot 7^{82}$;

в) $6^{11} \cdot 6^{21}$; г) $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^7 \cdot 2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10}$;

д)* $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{49}$; е)** $3^1 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot \ldots \cdot 3^{2n-1}$.

2. Упростите выражения (при натуральных значениях букв):

а) $2^{m+3} \cdot 2^{m+5}$; б) $3^{2m-1} \cdot 3^{3m+1}$;

в) $5^{100-m} \cdot 5^{m+1}$ для $m < 100$; г) $3^k \cdot 3^{k+1} \cdot 3^{k+2}$;

д) $2^{10-p} \cdot 2^{11-p} \cdot 2^{12-p} \cdot 2^{3p+5}$ для $p < 10$.

3. Упростите выражения:

а) $a^{m+1} \cdot a^{2m-1}$; б) $b^{k+3} \cdot b^{k+1} \cdot b^{k+5}$; в) $(abc)^{10-p} \cdot (abc)^{p+5}$ для $p < 10$.

4. Запишите в виде степени с натуральным показателем:

а) $(3^3)^6$; б) $(5^7)^9$; в) $(2^6)^3$; г) $(4^3)^2$.

5. Упростите выражения:

а) $(a^{m+1})^5$; б) $(c^5)^{m+1}$; в) $(a^{n+2})^k$;

г) $(b^n)^{m+2}$; д) $(c^5)^m \cdot c^m$; е) $(a^2)^n \cdot (a^3)^n \cdot (a^4)^n$.

6. Запишите разными способами, используя степени:

а) 216; б) 10000; в) $2^6 \cdot 3^4$;

г) 81^3; д) $2^6 \cdot 25$; е) $64 \cdot 729$.

7.** Найдите значение выражения:

а) $\log_4 2^{10}$; б) $\log_{25} 5^{18}$; в) $\log_9 3^{100}$;

г) $\log_8 2^{111}$; д) $\log_5 (25)^6$; е) $\log_2 (2^3 \cdot 4^5 \cdot 8^7)$;

ё) $\log_3 (27 \cdot 81)$ ж) $\log_6 (6^5 \cdot 36^3)$.

8.** Найдите последнюю цифру в десятичной записи числа:

а) 6^{1000}; б) 17^{41}; в) $3^{100} \cdot 4^{200}$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно число $(7^2)^3 \cdot (5^3)^2$?

1) $7^5 \cdot 5^5$; 2) $7 \cdot 5$; 3) $7^8 \cdot 5^9$; 4) $7^6 \cdot 5^6$.

1.2. Какому из произведений равно число 15^9?

1) $5^3 \cdot 3^9$; 2) $5^9 \cdot 3^{18}$; 3) $5^9 \cdot 3^9$; 4) $5^9 \cdot 3^{17}$.

1.3. На какую наибольшую степень числа 3 делится без остатка произведение $6^2 \cdot 12^3 \cdot 24^4$?

1) на 3^{24}; 2) на 3^9; 3) на 3^{18}; 4) на 3^{28}.

1.4. Чему равно $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$?

1) 1; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 0,777.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных произведений равны 12^4?

1) $4 \cdot 144 \cdot 2^2 \cdot 3^2$; 2) $2^8 \cdot 3^8$; 3) $2^{16} \cdot 3^8$; 4) $2^8 \cdot 3^4$.

2.2. Какие из указанных произведений равны 3^{30}?

1) 8^{10}; 2) $27^5 \cdot 27^5$; 3) $3^3 \cdot 9^3 \cdot 27^6$; 4) $3^5 \cdot 9^2 \cdot 27^3 \cdot 81^2$.

2.3. Какие из следующих чисел больше 1?

1) $\dfrac{42^4}{7^3 \cdot 6^2}$; 2) $\dfrac{32^2}{2^8 \cdot 3^2}$; 3) $\dfrac{2^{10} \cdot 5}{64 \cdot 3}$; 4) $\dfrac{7^3 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 6^2 \cdot 14 \cdot 49}$.

2.4. Значения каких из указанных выражений равны 0,25?

1) $\dfrac{3^3 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 2}$; 2) $\dfrac{7^3 \cdot 5^2}{28 \cdot 49 \cdot 25}$; 3) $\dfrac{7^{18} \cdot 6^5 \cdot 4^9 \cdot 2^5}{3^5 \cdot 2^7 \cdot 14^{18}}$; 4) $\dfrac{6^3 \cdot 36^2 \cdot 9}{3^3 \cdot 18^3 \cdot 32 \cdot 2^4}$.

§ 3. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

3.1. Определение 2^0. Мы определили степени с натуральными показателями. Распространим понятие степени на целые показатели.

Рассмотрим для примера число 2. Положим по определению $2^0 = 1$.

Если принять такое определение, то тогда для любого натурального числа n получаем

$$2^{n+0} = 2^n = 2^n \cdot 1 = 2^n \cdot 2^0.$$

Вопрос. Как показать, что, если положить по определению $3^0 = 1$, то для любого натурального числа n выполняется равенство $3^{0+n} = 3^0 \cdot 3^n$?

3.2. Определение нулевой степени. Итак, в соответствии с приведёнными выше примерами попытаемся определить a^0 для любого основания a таким образом, чтобы равенство

$$a^{n+0} = a^n \cdot a^0$$

выполнялось при всех натуральных n. Положим $a^0 = x$. Поскольку $a^{n+0} = a^n$, то число x должно быть решением уравнения

$$a^n = a^n \cdot x.$$

Если $a \neq 0$, то $a^n \neq 0$, и уравнение имеет единственное решение $x = 1$. Поэтому при $a \neq 0$ считаем, что $a^0 = 1$.

Если же $a = 0$, то $a^n = 0$ и уравнение $a^n = a^n \cdot x$ принимает вид $0 = 0 \cdot x$. Этому уравнению удовлетворяет любое число. Поэтому при $a = 0$ выражение a^0 определённого значения не имеет. Иными словами, выражение 0^0 *не определено* или *не имеет смысла*.

Вопрос. Какие ещё выражения, не имеющие смысла, вам известны?

3.3. Ещё одно свойство нулевой степени. Определив $a^0 = 1$ для любого числа $a \neq 0$, получаем $(a^0)^n = 1^n = 1 = a^{0 \cdot n}$ для любого натурального числа n.

Если теперь возьмём произвольные числа b и c, не равные нулю, то аналогично получим $b^0 = 1$, $c^0 = 1$, $(bc)^0 = 1$, откуда

$$b^0c^0 = (bc)^0.$$

Заметим, что если b и c — любые ненулевые числа, то $\left(\frac{b}{c}\right)^0 = 1$.

Таким образом, определяя для любого числа $a \neq 0$ нулевую степень равенством $a^0 = 1$, мы сохраняем свойства степеней, которые были установлены для натуральных показателей.

Вопрос. Как показать, что для любого числа $a \neq 0$ и любого натурального числа n выполняются равенства $(a^n)^0 = (a^0)^n$?

3.4. Определение отрицательной степени. Для любого ненулевого числа a определим a^{-1} как число, равное $\frac{1}{a}$, a^{-2} — как число, равное $\frac{1}{a^2}$, и так далее, то есть положим

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

для произвольного натурального числа n.

Пример 1. Число $\frac{1}{4}$ можно записать в виде 2^{-2}, потому что $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$.

Пример 2. Число 0,0001 равно числу 10^{-4}, так как $0{,}0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$.

Так как $a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1$, то выполняется следующее свойство:

$\boldsymbol{a^n \cdot a^{-n} = 1}$ **для любого ненулевого числа $\boldsymbol{a}$ и натурального числа $\boldsymbol{n}$.**

Это свойство можно записать в виде $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)}$.

Вопрос. Почему степени с отрицательным показателем определяются только для ненулевых чисел?

3.5. Определение отрицательной степени числа, если известна предыдущая степень.** Степень ненулевого числа a с отрицательным целым показателем можно также определить следующим образом: пусть показатель степени равен -1. Тогда по определению

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Если для натурального числа m степень a^{-m} определена, то для натурального числа $(m + 1)$ степень $a^{-(m+1)}$ определяем как число, равное $a^{-m} \cdot a^{-1}$:

$$a^{-(m+1)} = a^{-m} \cdot \frac{1}{a}.$$

Вопрос. Какое значение имеет 2^{-11}, если известно, что $2^{-10} = \frac{1}{1024}$?

3.6. Пример с делением листа бумаги пополам. Возьмём лист бумаги прямоугольной формы площадью 18 см^2.

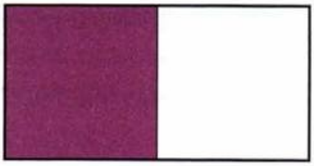


Рис. 1

Закрасим половину листа, как указано на рис. 1. Площадь закрашенной части равна $18 \cdot \frac{1}{2}$ см^2 или $18 \cdot 2^{-1}$ см^2.

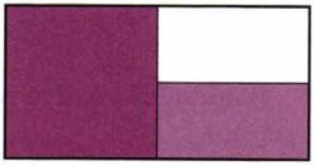


Рис. 2

Закрасим половину второй части листа, как указано на рис. 2. Площадь новой закрашиваемой части равна $\frac{1}{2}(18 \cdot 2^{-1})$ см^2 или $18 \cdot 2^{-2}$ см^2. Общая закрашенная площадь равна

$$18 \cdot 2^{-1} + 18 \cdot 2^{-2}\ (\text{см}^2).$$

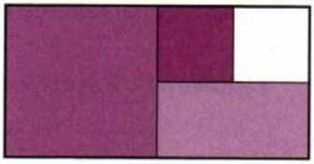


Рис. 3

Снова закрасим половину незакрашенной части листа (рис. 3). Площадь новой закрашиваемой части равна $\frac{1}{2}(18 \cdot 2^{-2})$ см^2 или $18 \cdot 2^{-3}$ см^2. Общая закрашенная площадь равна

$$18 \cdot 2^{-1} + 18 \cdot 2^{-2} + 18 \cdot 2^{-3}\ (\text{см}^2).$$

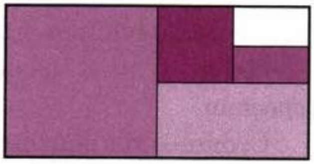


Рис. 4

Продолжив указанный процесс, каждый раз будем закрашивать часть, площадь которой в два раза меньше, чем закрашенная на предыдущем шаге часть листа (рис. 4—7).

После семи шагов получим, что самая маленькая закрашенная часть имеет площадь $18 \cdot 2^{-7}$ см^2 (рис. 7), а общая закрашенная площадь равна

$$18 \cdot 2^{-1} + 18 \cdot 2^{-2} + 18 \cdot 2^{-3} + 18 \cdot 2^{-4} + 18 \cdot 2^{-5} + 18 \cdot 2^{-6} + 18 \cdot 2^{-7}\ (\text{см}^2).$$

Вопрос. Как показать, что последняя сумма равна $18 - 18 \cdot 2^{-7}$?

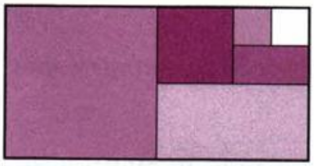


Рис. 5

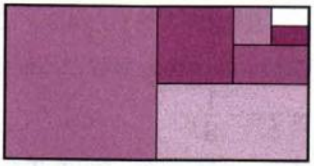


Рис. 6

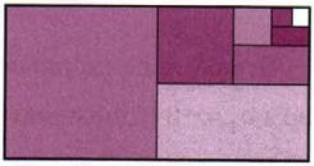


Рис. 7

3.7.* Пример геометрической прогрессии. В предыдущем пункте последовательно закрашиваемые площади, выраженные в квадратных сантиметрах, образуют *последовательность:*

$$18 \cdot 2^{-1};\ 18 \cdot 2^{-2};\ 18 \cdot 2^{-3};\ \dots$$

Каждый следующий элемент этой последовательности в два раза меньше стоящего перед ним элемента, то есть получается умножением на число $q = \frac{1}{2}$.

Данная последовательность является примером *геометрической прогрессии.*

Последовательность ненулевых чисел называют геометрической прогрессией, если каждый её элемент, начиная со второго, получается из предыдущего элемента умножением на одно и то же число q, не равное нулю.

Пример 3. Рассмотрим последовательно записанные числа:

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486.$$

Каждое число, начиная со второго, получается умножением предыдущего числа на 3. Поэтому эти последовательно записанные шесть чисел являются начальными членами геометрической прогрессии.

Число $q = 3$ называют *знаменателем* этой геометрической прогрессии.

Стоящее на первом месте число 2 называют *первым членом* или *первым элементом* этой геометрической прогрессии.

Пример 4. Рассмотрим последовательно записанные числа:

$$0{,}3,\ 0{,}03,\ 0{,}003,\ 0{,}0003,\ 0{,}00003.$$

Это пять начальных членов геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = 0{,}3$ и знаменателем $q = 0{,}1$.

Пример 5. Рассмотрим последовательно записанные числа:

$$-2,\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{9},\ \frac{2}{27},\ -\frac{2}{81},\ \frac{2}{243},\ -\frac{2}{729}.$$

Это семь начальных членов геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = -2$ и знаменателем $q = -\frac{1}{3}$.

Пример 6. Площадь озера, занятая разрастающимися кувшинками, увеличивается каждый день вдвое. Через 30 дней от одной кувшинки покрытой оказывается вся поверхность озера. За какое время покроется цветами всё озеро при разрастании двух кувшинок?

Решение. Представим себе, что от одной кувшинки оказалась покрытой половина поверхности озера. Тогда на следующий день всё озеро окажется покрытым кувшинками. Отсюда видно, что за день до этого, то есть через 29 дней, была покрыта лишь половина озера. Следовательно, две кувшинки, разрастаясь, покроют озеро за 29 дней.

Вопрос. Каким должен быть седьмой член геометрической прогрессии из примера 3?

3.8. Выражение последующих членов геометрической прогрессии через предыдущие.** Для записи бесконечной последовательности в общем виде удобно члены последовательности обозначать так:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots .$$

При таком способе записи можно сразу же определить, на каком месте стоит тот или иной член последовательности. Например, a_{10} стоит на десятом месте от начала последовательности.

В новых обозначениях геометрическую прогрессию можно определить как такую последовательность чисел a_n, для которой при всех натуральных n выполняется равенство

$$a_{n+1} = q \cdot a_n,$$

где q — не зависящее от номера n отличное от нуля число, называемое знаменателем геометрической прогрессии.

Вопрос. Как записать начальные четыре члена геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q?

Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется число a^0?

2. Как определяется число a^{-1} для ненулевого числа a?

3. Как определяется степень ненулевого числа a с целым отрицательным показателем?

4. Как вы понимаете последовательность?

5.* Какую последовательность называют геометрической прогрессией?

6.* Что такое первый член геометрической прогрессии?

7.* Что такое знаменатель геометрической прогрессии?

Задачи и упражнения

1. Упростите выражение $a^{m^2-(m-1)(m+1)-1}$.

2. Найдите значение a^{-1}, если:

а) $a = 6$; б) $a = \frac{4}{3}$; в) $a = -0{,}7$;

г) $a = 1$; д) $a = \frac{1}{121}$; е) $a = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$.

3. Найдите:

а) b^{-m}, если $b = 3$ и $m = 4$;

б) x^{-m+5}, если $x = 2$ и $x^m = 32$;

в)* c^{-m+n}, если $c = 3$ и $m = n + 4$;

г)** $a^{-p\cdot p}$, если $a = -2$ и $a^p = -128$.

4.* Запишите n начальных членов геометрической прогрессии, если:

а) $a_1 = 2$, $q = 2$, $n = 5$; б) $a_1 = 1$, $q = -3$, $n = 4$;

в) $a_1 = 100$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 8$; г) $a_1 = 6$, $q = 0{,}01$, $n = 5$;

д) $a_1 = 1$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 6$; е) $a_1 = 1$, $q = -1$, $n = 10$.

5.* Найдите сумму пяти начальных членов геометрической прогрессии, если:

а) $a_1 = 1$, $q = 2$; б) $a_1 = 6$, $q = 0{,}1$;

в) $a_1 = 3$, $q = -0{,}1$; г) $a_1 = 16$, $q = \frac{3}{2}$;

д) $a_1 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$; е) $a_1 = -256$, $q = -\frac{1}{4}$.

6.** Найдите суммы:

а) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{100\cdot 101}$;

б) $3\cdot 2^{-1} + 3\cdot 2^{-2} + 3\cdot 2^{-3} + \ldots + 3\cdot 2^{-10}$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно значение выражения $3\cdot 2^{-3} + (-8)^{-1}$?

1) 0,125; 2) −0,125; 3) 0,25; 4) −0,25.

1.2. Чему равно значение выражения $(2^{-2})^{-3}$?

1) 2^{-1}; 2) 2; 3) 2^{-6}; 4) 2^6.

1.3. Чему равно значение выражения $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-7} \cdot 2^{-10}$?

1) $2^{-5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$; 2) $2^0 \cdot 3^{-10}$; 3) $3^0 \cdot 2^{-14}$; 4) $3^{-10} \cdot 2^{-14}$.

1.4. Среди приведённых чисел укажите наименьшее:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. При каких значениях n число $\left(\frac{1}{4}\right)^{-n}$ больше $\frac{1}{1000}$?

1) $n = 0$; 2) $n = -4$; 3) $n = -5$; 4) $n = -6$.

2.2. Какие из указанных выражений равны $\frac{a^2}{b^4}$ при всех ненулевых значениях a и b?

1) $a^2 \cdot (b^{-1})^3 \cdot b^2 \cdot \frac{a}{b^2}\, a^{-1}$; 2) $a^3 \cdot b^{-4} \cdot a^{-2} \cdot b^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$;

3) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^6$; 4) $\frac{a}{b^2} \cdot \left(\frac{a}{b^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a}{b^2}\right)^3$.

2.3. Чему равно значение выражения $1 - 2^{-10}$?

1) $\frac{1022}{1024}$; 2) $\frac{1023}{1024}$; 3) $\frac{511}{512}$; 4) $\frac{510}{512}$.

2.4. Какие значения может иметь сумма нескольких начальных членов геометрической прогрессии с первым членом 3 и знаменателем $\frac{1}{2}$?

1) $20 + 4^{-1}$; 2) $5 + 4^{-1}$; 3) 5; 4) 20.

§ 4. СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ С ЦЕЛЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

4.1. Произведение степеней с одинаковыми основаниями и целыми показателями. Рассмотрим произведения степеней одного числа с целыми показателями.

Для примера в качестве основания степени возьмём число 2.

Напомним, что для натуральных показателей m и n во втором параграфе установлено первое основное свойство: $2^m \cdot 2^n = 2^{m+n}$.

В третьем параграфе аналогичное равенство установлено, когда числа m и n могут принимать также значение 0.

Такое же свойство выполняется для произвольных целых показателей m и n.

Пример 1. Пусть $m = 15$ и $n = -13$. Тогда

$$2^{15} \cdot 2^{-13} = \frac{2^{15}}{2^{13}} = \frac{2^{13} \cdot 2^{2}}{2^{13}} = 2^{2} = 2^{15+(-13)}.$$

Пример 2. Пусть $m = 3$ и $n = -7$. Тогда

$$2^{3} \cdot 2^{-7} = \frac{2^{3}}{2^{7}} = \frac{1}{2^{4}} = 2^{-4} = 2^{3-7}.$$

Пример 3. Пусть $m = -7$ и $n = -9$. Тогда

$$2^{-7} \cdot 2^{-9} = \frac{1}{2^{7}} \cdot \frac{1}{2^{9}} = \frac{1}{2^{7+9}} = 2^{-(7+9)} = 2^{(-7)+(-9)}.$$

Вопрос. Как показать, что $3^{-1001} \cdot 3^{2001} = 3^{1000}$?

4.2. Первое основное свойство степени с целыми показателями. В предыдущих пунктах на примерах показано, что для целых чисел $m = n$ выполняется равенство

$$2^{m} \cdot 2^{n} = 2^{m+n}.$$

Аналогичное равенство остаётся верным и в том случае, если вместо основания степени 2 взять любое ненулевое число a.

Для любого ненулевого числа a при любых целых значениях m и n выполняется равенство

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}.$$

Таким образом, для целых показателей также остаётся верным *первое основное свойство* степени.

Вопрос. Почему первое основное свойство степени с целым показателем записывают только для ненулевого основания степени?

4.3. Второе основное свойство степени с целыми показателями. Во втором параграфе показано, что для натуральных показателей выполняется второе основное свойство степени, то есть $(a^{p})^{q} = a^{pq}$, когда p и q — натуральные числа.

Для произвольных целых показателей второе основное свойство степени также остаётся верным.

Для любого ненулевого числа a при любых целых значениях m и n выполняется равенство

$$(a^{m})^{n} = a^{mn}.$$

Пример 4. Пусть $a = 3$, $m = -2$, $n = 3$. Тогда

$$(3^{-2})^3 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^3 = \frac{1}{(3^2)^3} = \frac{1}{3^{2\cdot 3}} = 3^{-2\cdot 3} = 3^{(-2)\cdot 3}.$$

Пример 5. Пусть $a = 10$, $m = -2$, $n = -4$. Тогда

$$(10^{-2})^{-4} = 1 : (10^{-2})^4 = 1 : \frac{1}{10^{2\cdot 4}} = 10^{2\cdot 4} = 10^{(-2)\cdot(-4)}.$$

Пример 6. Пусть $a = 7$, $m = -5$, $n = 0$. Тогда

$$(7^{-5})^0 = 1 = 7^0 = 7^{(-5)\cdot 0}.$$

Вопрос. Как показать, что равенство $(a^{-p})^q = (a^p)^{-q}$ выполняется для любого ненулевого числа a и любых целых чисел p и q?

4.4.* Доказательство второго основного свойства. Разберём доказательство второго основного свойства степени для целых показателей.

Учитывая, что для натуральных показателей это свойство доказано во втором параграфе, рассмотрим другие случаи.

Пусть $p = 0$. Тогда

$$(a^p)^q = 1^a = 1 = a^{0\cdot q} = a^{pq}.$$

Если $q = 0$, то

$$(a^p)^q = (a^p)^0 = 1 = a^{p\cdot 0} = a^{pq}.$$

Пусть $p = -m$, $q = n$, где m и n — натуральные числа. Тогда

$$(a^p)^q = (a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{(-m)n} = a^{pq}.$$

Если $p = m$, $q = -n$, где m и n — натуральные числа, то

$$(a^p)^q = (a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{(-m)n} = a^{pq}.$$

В том случае, когда $p = -m$, $q = -n$, где m и n — натуральные числа, воспользуемся уже доказанным выше равенством

$$(a^{-m})^n = a^{(-m)n} = a^{-mn}.$$

Тогда

$$(a^p)^q = (a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn} = a^{(-m)(-n)} = a^{pq}.$$

Таким образом, мы по очереди рассмотрели все возможные случаи знаков целых чисел p и q, и каждый раз выполнялось равенство

$$(a^p)^q = a^{pq},$$

что и доказывает второе основное свойство степени.

Вопрос. Как показать, что равенство $\left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{1}{b^m}$ выполняется для любого ненулевого числа b и любого целого числа m?

4.5. Третье основное свойство степени с целыми показателями. Во втором параграфе показано, что для натуральных показателей выполняется третье основное свойство степени, то есть $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ для произвольных чисел a и b и натурального числа n.

Для произвольных целых показателей третье основное свойство также остаётся верным.

Для любых ненулевых чисел a и b при любом целом значении m выполняется равенство

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m.$$

Пример 7. Пусть $a = 5$, $b = 3$, $m = -2$. Тогда

$$(5 \cdot 3)^{-2} = \frac{1}{(5 \cdot 3)^2} = \frac{1}{5^2 \cdot 3^2} = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{3^2} = 5^{-2} \cdot 3^{-2}.$$

Вопрос. Чему равно значение выражения $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 6^{-2}$?

4.6.* Доказательство третьего основного свойства степени. Разберём доказательство третьего основного свойства степени для целых показателей. Так как во втором параграфе для натуральных показателей это свойство доказано, то остаётся рассмотреть другие случаи.

Пусть $p = 0$. Тогда

$$(ab)^p = (ab)^0 = 1 = a^0 \cdot b^0 = a^p \cdot b^p.$$

Пусть $p = -m$, где m — натуральное число. Тогда

$$(ab)^p = (ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m} = a^p \cdot b^p.$$

Таким образом третье основное свойство степени с целым показателем доказано.

Вопрос. Как доказать, что $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$ для любых ненулевых чисел x и y?

4.7. Целая степень отношения двух чисел. Пусть a и b — любые ненулевые числа, m — произвольное целое число. Тогда

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = (a \cdot b^{-1})^m = a^m \cdot (b^{-1})^m = a^m \cdot b^{(-1)m} = a^m \cdot b^{-m} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Вопрос. Какие свойства степени с целым показателем вы знаете?

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте первое основное свойство степени с целым показателем. Расскажите, как проводится доказательство этого свойства.

2. Сформулируйте второе основное свойство степени с целым показателем. Расскажите, как проводится доказательство этого свойства.

3. Сформулируйте и докажите третье основное свойство степени с целым показателем.

4. Как возводить в целую степень частное двух ненулевых чисел?

Задачи и упражнения

1. Найдите значение выражения:
а) $3^{-5} \cdot 3^9 \cdot 2^2$; б) $7^8 \cdot 7^{-3} \cdot 7^{-4}$; в) $2^6 \cdot 4^{-3}$;
г) $81 \cdot 9^{-3} \cdot 3^4$; д) $16^2 \cdot 8^{-3} \cdot 4^4 \cdot 2^{-5}$; е)* $2^1 \cdot 2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 2^{-4} \cdot \ldots \cdot 2^{-100}$.

2. Вычислите:
а) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + 3^{-1}$; б) $(-0{,}2)^{-3} + (0{,}1)^{-3}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$; г) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$;
д) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 : \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$; е)* $(0{,}2)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$; ё) $\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{-2}$.

3. Упростите при целых значениях m выражение $4^{6+m} \cdot 4^{1-2m} \cdot 4^{m-5}$.

4.** Докажите, что:
а) $\sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{72}$; б) $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$; в) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2$;
г) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$; д) $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$.

5.** Докажите, что $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ для неотрицательных чисел a и b.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно $(-3)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3$?
1) -3^2; 2) -3^{-2}; 3) 3^{-2}; 4) 3^2.

1.2. Чему равно $(((-2)^{-3})^4)^{-5}$?

1) -2^{-4}; 2) 2^{-4}; 3) -2^{60}; 4) 2^{60}.

1.3. Чему равно $3^{2x-1} + 3^{2x+1} + 3^{2x+2}$?

1) 3^{6x+3}; 2) $3^{(4x^2-1)(2x+2)}$; 3) $9 \cdot 3^{2x}$; 4) $\frac{37}{3} \cdot 3^{2x}$.

1.4. Чему равно $\left(\frac{(2^{-1}) \cdot 3}{(4^{-1}) \cdot 9^{-1}}\right)^{-1}$?

1) $\frac{2}{3^3}$; 2) $-\frac{2}{3^3}$; 3) $\frac{3^3}{2}$; 4) $\frac{1}{3^3 \cdot 2}$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Значения каких из приведённых выражений равны 25?

1) $(5^{-3})^{+1}$; 2) $5^7 \cdot 5^{-5}$; 3) $(5^{-7} \cdot 5^5)$; 4) $\frac{1}{5^7} \cdot \frac{1}{5^{-5}}$.

2.2. Какие из указанных выражений равны $\frac{a^8}{b}$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$?

1) $\left(\frac{a^3}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^7 \cdot ab$;

3) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-5} \cdot a \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3$; 4) $\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{10} \cdot (b^{-1})^{-5}$.

2.3. При каких из указанных значений a и b верно неравенство $a < b$?

1) $a = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $b = \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$; 2) $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{-5}$, $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{-6}$;

3) $a = \left(\frac{4}{3}\right)^5$, $b = \left(\frac{4}{3}\right)^6$; 4) $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$, $b = \left(\frac{2}{3}\right)^5$.

2.4. Какие из указанных выражений равны $a^{-2} \cdot b^3$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$?

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^{14} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-12} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot b$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^0 \cdot b^{11}$;

3) $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^8 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{12} \cdot a$; 4) $\left(\frac{b}{a}\right)^7 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{-2} \cdot b$.

Глава 3
ТОЖДЕСТВА

В этой главе рассматривается тождественное равенство всюду определённых буквенных выражений. В качестве примеров приводятся некоторые замечательные тождества.

§ 1. БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1.1. Примеры буквенных выражений. С буквенными выражениями вы уже встречались. Например, буквенными выражениями являются:

$$a;\ \ (a+1)-a;\ \ 2a-(2a-10);\ \ 3x;$$

$$3a+5b;\ \ -3ab;\ \ a^2+b^2+c^2;\ \ \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Вопрос. Какие ещё примеры буквенных выражений вы знаете?

1.2. Постоянные и переменные величины в буквенном выражении. В зависимости от конкретной задачи буквы в выражениях могут иметь разный смысл.

Рассмотрим, например, буквенное выражение $\frac{1}{2}ah$, которое записано в формуле $S=\frac{1}{2}ah$ для вычисления площади треугольника по основанию a и высоте h. В данное выражение вместо буквы a можно подставлять различные числа. Точно так же различные числа можно подставлять вместо буквы h. Например, если $a=2$, $h=4$, то $\frac{1}{2}ah=4$; если $a=10$, $h=5$, то $\frac{1}{2}ah=25$; если $a=15$, $h=3$, то $\frac{1}{2}ah=\frac{45}{2}$.

Таким образом, значения, которые принимают буквы a и h, могут изменяться. Поэтому в данном случае буквы a и h в выражении $\frac{1}{2}ah$ являются обозначением *переменных величин*.

Однако может быть, что не все буквы в буквенных выражениях обозначают переменные величины. Рассмотрим, например, выражение πR^2H, которое применяется для вычисления объёма цилиндра с радиусом основания R и высотой H. В этом случае буквой π обозначено конкретное число, равное отношению длины окружности к её диаметру. Буква π используется как удобное обозначение для вполне конкретного числа, то есть буква π является *постоянной* величиной в выражении πR^2H.

В зависимости от задачи, которую мы решаем, буквы R и H могут обозначать не изменяющиеся (постоянные) величины или переменные.

Аналогично в физике буквой c иногда обозначают скорость света. В таком случае буква c используется как обозначение постоянной величины. Эта буква может участвовать в различных формулах, принимая при этом одно и то же значение.

Обычно специально оговаривают, какие буквы являются постоянными, а какие переменными.

Будем считать, что если про буквы ничего не сказано, то они являются переменными.

Вопрос. Как называется число, обозначенное буквой k в записи $y = kx$, выражающей прямую пропорциональную зависимость переменной y от переменной x?

1.3. Значение буквенного выражения. Рассмотрим некоторое буквенное выражение, например:

$$(a + b) \cdot (c + d),$$

где a, b, c, d — переменные.

Возьмём $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, подставим эти числа вместо букв и получим числовое выражение

$$(1 + 2) \cdot (3 + 4).$$

Выполнив действия, найдём

$$(1 + 2) \cdot (3 + 4) = 3 \cdot 7 = 21.$$

Полученное число 21 является *значением* буквенного выражения

$$(a + b) \cdot (c + d)$$

при выбранных значениях букв.

Если при вычислении значения буквенного выражения выполнить не все арифметические действия, а только некоторые, то вместо числа получится *числовое выражение*. Это числовое выражение также принято считать значением буквенного выражения при соответствующих числовых значениях букв. Например, $\frac{4}{2}$ — значение выражения $\frac{a}{b}$ при $a = 4$, $b = 2$; $1 + \sqrt{2}$ — значение выражения $x + y$ при $x = 1$, $y = \sqrt{2}$.

Вопрос. Чему равно значение выражения $(a + b)(c + d)$ при $a = -0{,}5$; $b = 1{,}25$; $c = -0{,}005$; $d = 0{,}0001$?

1.4. Всегда ли буквенное выражение имеет значение? Значение буквенного выражения $(a + b) \cdot (c + d)$ из предыдущего пункта можно вычислить при любых наборах значений букв. В этом случае говорят, что *выражение имеет смысл при любых значениях переменных.* Для краткости будем говорить, что такое буквенное выражение *определено всюду* или, по-другому, *всюду определено.*

Рассмотрим теперь буквенное выражение $\frac{1}{a}$. Если взять $a = 0$, то значение $\frac{1}{a}$ вычислить невозможно, так как на нуль делить нельзя.

Можно сказать, что выражение $\frac{1}{a}$ имеет смысл только при значениях a, не равных нулю, то есть буквенное выражение $\frac{1}{a}$ не является всюду определённым.

Рассматривая буквенные выражения, иногда для краткости вместо слов «буквенное выражение» будем употреблять слово «выражение».

Вопрос. При каких значениях переменных имеет смысл буквенное выражение $\frac{1}{a-b}$?

1.5. Подстановка в буквенном выражении. Рассмотрим буквенное выражение $a^2 - ab + b^2$. Заменим в этом выражении букву b на выражение $(c + d)^2$. Получим новое буквенное выражение

$$a^2 - a(c + d)^2 + ((c + d)^2)^2.$$

Говорят, что мы произвели *подстановку* $(c + d)^2$ вместо буквы b в выражение $a^2 - ab + b^2$.

Заметим, что если в буквенное выражение, определённое всюду, вместо некоторой буквы подставлять выражение, также определённое всюду, то полученное новое буквенное выражение будет также всюду определено.

Вопрос. Какой подстановкой можно получить выражение $a^2 + b^2 + a^2b^2$ из выражения $x + y + xy$?

Контрольные вопросы и задания

1. Как вы понимаете буквенные выражения?

2. Какая величина считается постоянной в буквенном выражении?

3. Какая величина считается переменной в буквенном выражении?

4. Что означают слова «значение буквенного выражения»?

5. Как понимать слова, что «выражение имеет смысл при данном наборе значений переменных»?

6. Какие буквенные выражения называют определёнными всюду?

7. Какие примеры буквенных выражений, не всюду определённых, вы знаете?

Задачи и упражнения

1. Определите, какие буквенные выражения определены всюду, а какие нет:

а) $\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\frac{c}{5}$; б) $x+\frac{6}{x}$; в) $\frac{(c-1)\cdot(c-2)}{(c-2)}$;

г) $(5a^2-8ab):(2^4-4^2)$; д) $7ab^{-1}$; е) $\frac{x^2}{6}+\frac{x}{a}+\frac{1}{b}$.

2. Покажите, как выполняя последовательно арифметические операции, из букв и чисел получить выражения:

а) $11a-8m$; б) $3ab+c$; в) x^3-x^3+x-1;

г) $abc+ab+a$; д) $(x^2-y^2)^2$; е) $3a^2b+2ab^2$.

3. Какие буквы в следующих формулах могут быть переменными?

а) $\mathrm{V}=\frac{4}{3}\pi R^3$ — для вычисления объёма шара радиуса R;

б) $V=abc$ — для вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c;

в) $S=vt$ — для вычисления пройденного пути за время t при фиксированной скорости v;

г) $V=\pi R^2H$ — для вычисления объёма цилиндра по радиусу основания и высоте;

д) $E=\frac{1}{2}mv^2$ — для вычисления кинетической энергии тела фиксированной массы m, движущегося со скоростью v.

4. Найдите значение выражения $2a-3b+4c$:

а) при $a=-0,7$; $b=9{,}2$; $c=5{,}4$;

б) при $a=26{,}3$; $b=-14{,}8$; $c=11{,}2$;

в)* при $a=\sqrt{2}$; $b=\sqrt{8}$; $c=\sqrt{32}$.

5. Найдите значение выражения $5ab^2-7a^2b$:

а) при $a=0{,}1$; $b=0{,}01$; б) при $a=0{,}01$; $b=0{,}1$;

в) при $a=11$; $b=-25$; г) при $a=\frac{13}{35}$; $b=\frac{7}{26}$;

д)* при $a=\sqrt{3}$; $b=-\sqrt{27}$.

6. Найдите значение выражения $m+n\,(k+l\cdot p)$:

а) при $m=-7$; $n=4$; $k=3{,}2$; $l=-0{,}8$; $p=11$;

б) при $m=3{,}4$; $n=1{,}6$; $k=-2{,}5$; $l=8{,}4$; $p=7{,}5$.

7. Убедитесь на примерах, что указанные выражения имеют равные значения при одинаковых наборах значений переменных букв:

а) $(b+1)(b-2)$ и b^2-b-2;

б) $(x+y)^2+(x-y)^2$ и $2x^2+2y^2$

в) $(a+c)^3+(a-c)^3$ и $2a(a^2+3c^2)$;

г)$(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ и $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$.

8. Проверьте на примерах, что если значения переменных a, b, c выбраны так, что $a+b+c=0$, то тогда $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

9. Выполните подстановку выражения $z+2t^2$ вместо переменной x в следующие выражения:

а) $x+abc$; б) $xa+zab$; в) $xa+x+ab$;

г) $x+x^2+a$; д) $x+z+x^2+t$; е) $(x-a)x+zx$.

10. Выполните подстановку выражения z^2+z+t вместо переменной x и $2z+t$ вместо переменной y в выражения:

а) $x+ab$; б) $x+y$; в) x^2+y;

г) $x+xy+zx$; д) $xz+yt$; е) $x+y+xy+y^2z$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Укажите буквенное выражение среди следующих:

1) $ab\pm ab$; 2) $ab-ab$;

3) $ab+-ab$; 4) $ab-ab+:ab$.

1.2. Среди следующих укажите не буквенное выражение:

1) $cab-abc+abc\cdot abc$; 2) $abc-3ac-b+a$;

3) $(ab)\cdot ac-ab:ac+c$; 4) $(ab)\cdot ac-b\cdot-(b\cdot c)$.

1.3. Среди следующих укажите всюду определённое буквенное выражение:

1) $ab+bc+\dfrac{bc}{abc}$; 2) $300a+400b-\dfrac{2}{a}$;

3) $(b+c):(a+c)$; 4) $(b+c)\cdot(a+c)$.

1.4. Укажите среди следующих выражение, не всюду определённое:

1) $(ab)\cdot((cd):2)$; 2) $(abc)\cdot(bc-3)$;

3) $(ab):((c\cdot d):2)$; 4) $(a\cdot(b+c))\cdot(c+(a+c):3)$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Укажите среди следующих те выражения, значениями которых при $a=0$, $b=2$, $c=4$ является 18:

1) $ab+a^2b+bc+b^2c-c-b$; 2) $a^4c+ba-b^2+c^3-bc$;

3) $2bc+c-b+16a^2bc$; 4) $ab+bc+ac^2+bc^2-c\cdot c^2$.

2.2. Укажите все выражения, значения которых при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ являются полными квадратами:

1) $abc + a^2b^2c^2 + bc + a$; 2) $2b^2c^2 + c^2$;
3) $c^4 - ab^4$; 4) $a^3b^3 + c^3 + bc^2$.

2.3. При каких значениях a, b, c выражение $\frac{a+b}{c} + \frac{c+a}{a+b} + a^2$ не определено?

1) $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$; 2) $a = 16$, $b = -16$, $c = 3$;
3) $a = -3$, $b = 3$, $c = 3$; 4) $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.

2.4. При каких значениях a, b, c выражение $\frac{a^2b + c}{ab^2 + c} + \frac{abc + 3}{bc - 3} + 9a^2b$ определено?

1) $a = 0$, $b = -1$, $c = -1$; 2) $a = 12$, $b = 1{,}5$, $c = 2$;
3) $a = 1$, $b = 1$, $c = -3$; 4) $a = 12$, $b = 0$, $c = -1$.

§ 2. ТОЖДЕСТВА

2.1. Определение тождественного равенства двух буквенных выражений. Любые два буквенных выражения можно соединить знаком равенства. Например, в записи

$$S = vt$$

слева от знака равенства стоит выражение S, а справа от знака равенства стоит выражение $v \cdot t$.

В приведённом примере при подстановке вместо букв различных значений могут получаться как верные числовые равенства, так и неверные. Например, при $S = 5$, $v = 6$, $t = 1$ равенство $5 = 6 \cdot 1$ неверно, а при $S = 12$, $v = 4$, $t = 3$ равенство $12 = 4 \cdot 3$ верно.

Равенство в формуле $S = vt$ отличается от равенства между выражениями ab и ba. В самом деле, формула $ab = ba$ превращается в верное числовое равенство при подстановке вместо букв a и b любых числовых значений. По этой причине равенство $ab = ba$ иногда называют *тождеством* или *тождественным равенством*. Когда важно подчеркнуть, что равенство буквенных выражений является тождеством, используют запись

$$ab \equiv ba.$$

Два всюду определённых буквенных выражения называются *тождественно равными*, если равны значения этих выражений при подстановке вместо букв любых наборов чисел.

Пример 1. $a(b + c) \equiv ab + ac$.

Пример 2. $(p+q)-(p+q)\equiv 0$.

Пример 3. $2x+3x\equiv 5x$.

В случае, когда ясно, что речь идёт о тождественном равенстве буквенных выражений, вместо знака $\equiv$ используют знак $=$.

Заметим, что если при каком-то хотя бы одном наборе значений переменных получаются разные значения этих выражений, то эти два буквенных выражения не являются тождественно равными.

Тождествами принято считать также верные равенства между числовыми выражениями, вовсе не содержащими переменных букв. Например, равенства $2\cdot 2=4$, $\sqrt{25}=5$, $\frac{\pi}{\pi}=1$ — все являются тождествами. Равенство $3=2+2$ тождеством не является, потому что оно неверно.

Вопрос. Как показать, что выражения abc и $a+b+c$ не являются тождественно равными?

2.2. Тождественное преобразование буквенных выражений. Тождественным преобразованием буквенного выражения называют замену этого выражения на тождественно равное ему. Основные правила преобразования всюду определённых буквенных выражений можно сформулировать так.

При преобразовании буквенных выражений можно применять законы сложения, вычитания и умножения, которые используются при действиях с числовыми выражениями.

Например, можно последовательно записать тождественные равенства:

$$(6a+5b+1)-(3a+5(b-1))=(6a+5b+1)-(3a+5b-5)=$$
$$=6a+5b+1-3a-5b+5=(6a-3a)+(5b-5b)+(1+5)=$$
$$=(6-3)\,a+0+6=3a+6.$$

Вопрос. Как называется закон, позволяющий записать тождество $6a-3a=(6-3)\cdot a$?

2.3. Свойства тождественного равенства: транзитивность, симметричность, рефлексивность.** Тождественные равенства буквенных выражений обладают важными свойствами. Для формулировки этих свойств обозначим буквами A, B, C произвольные буквенные выражения.

Первое свойство. Если $A\equiv B$ и $B\equiv C$, то $A\equiv C$.

Обычно это свойство называют *транзитивностью.*

Второе свойство. Если $A\equiv B$, то $B\equiv A$.

Это свойство называют *симметричностью.*

Третье свойство. $A \equiv A$.

Это свойство называют *рефлексивностью*.

Приведённые свойства позволяют исключать промежуточные «звенья» из «цепочки» тождественных преобразований буквенных выражений. Например:

$$(3x-1)(2x-1) = 3x(2x-1) - 1(2x-1) =$$
$$= (3x \cdot 2x - 3x \cdot 1) - (1 \cdot 2x - 1 \cdot 1) = (3 \cdot 2 \cdot x \cdot x - 3x) - (2x-1) =$$
$$= (6x^2 - 3x) - (2x-1) = 6x^2 - 3x - 2x + 1 =$$
$$= 6x^2 - (3+2)x + 1 = 6x^2 - 5x + 1.$$

В итоге получаем тождество

$$(3x-1)(2x-1) = 6x^2 - 5x + 1.$$

Вопрос. Какие свойства равенства геометрических фигур вы знаете?

2.4. Правила применения законов арифметики при тождественных преобразованиях. Пусть A, B, C — некоторые буквенные выражения. Тогда имеют место следующие тождества:

$A + B = B + A$ — переместительный закон (коммутативность) сложения;

$(A + B) + C = A + (B + C)$ — сочетательный закон (ассоциативность) сложения;

$A + 0 = A$ — свойство числа нуль;

$A + (-A) = 0$ — существование противоположного элемента;

$A \cdot B = B \cdot A$ — переместительный закон (коммутативность) умножения;

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ — сочетательный закон (ассоциативность) умножения;

$A(B + C) = AB + AC$ — распределительный закон (дистрибутивность);

$A \cdot 1 = A$ — свойство единицы;

$-A = (-1) \cdot A$ — свойство выражения $(-A)$.

Приведённые свойства позволяют, например, заменить выражение $-3aba + 5a$ на равное ему выражение $a(5 - 3ab)$.

Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$-3aba + 5a = -a \cdot (3ba) + a \cdot 5 = a(-3ba + 5) = a(5 - 3ba) = a \cdot (5 - 3ab).$$

Вопрос. Какие свойства применялись в приведённом примере при записи каждого очередного равенства?

2.5. Получение новых тождеств методом подстановки. Важным приёмом получения новых тождеств является *подстановка* в известное тождество вместо букв некоторых буквенных (или числовых) выражений.

Пример 4. Рассмотрим тождество

$$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c.$$

Подставим в обе части тождества вместо буквы a выражение $(b + c)$ на все те места, где встречается буква a. Получим новое тождество

$$(b + c) \cdot (b + c) \equiv (b + c) \cdot b + (b + c) \cdot c.$$

Пример 5. Рассмотрим тождество $(ab)^3 = a^3 \cdot b^3$. Подставим вместо буквы a число 2 на все те места, где встречается буква a, и вместо буквы b выражение $(a + 1)$ на все те места, где встречается буква b. Получим новое тождество

$$(2(a + 1))^3 = 8 \cdot (a + 1)^3.$$

Пример 6. Рассмотрим тождество

$$a^2 - b^2 \equiv (a - b)(a + b).$$

Подставим вместо буквы a выражение $(x + y)$, вместо буквы b выражение $(x - y)$.

Получим

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 \equiv ((x + y) - (x - y))((x + y) + (x - y)) \equiv$$
$$\equiv (x + y - x + y) \cdot (x + y + x - y) \equiv (2y) \cdot (2x) \equiv (2 \cdot 2) \cdot (x \cdot y) \equiv 4xy.$$

Таким образом, получается новое тождество

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 \equiv 4xy.$$

Вопрос. Как доказать тождество $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 \equiv 4a^2b^2$?

2.6. Прибавление к обеим частям тождества одинакового выражения.

Напомним, что для чисел выполняется такое свойство равенства:

Если $a = b$, то $a + x = b + x$ для любого числа x.

Аналогичное свойство выполняется для тождественного равенства всюду определённых выражений.

Пусть A и B два тождественно равных выражения и X — некоторое выражение. Тогда выражения $A + X$ и $B + X$ тождественно равны.

Это правило можно кратко записать в символической форме:

Если $A \equiv B$, то $A + X \equiv B + X$.

Пример 7. Рассмотрим тождество $a^2 - a = a \cdot (a - 1)$. Прибавим к обеим частям тождества выражение $a - 1$. Получим

$$(a^2 - a) + (a - 1) = a \cdot (a - 1) + a - 1,$$
$$a^2 - a + a - 1 = a \cdot (a - 1) + 1 \cdot (a - 1),$$
$$a^2 - 1 = (a + 1) \cdot (a - 1).$$

Вопрос. Как доказать, что если $A \equiv B$, то $A - X \equiv B - X$?

2.7. Умножение обеих частей тождества на одинаковое выражение. Для чисел выполняется такое свойство равенства:

Если $a = b$, то $a \cdot x = b \cdot x$ для любого числа x.

Аналогичное свойство выполняется для тождественного равенства всюду определённых выражений.

Пусть A и B два тождественно равных выражения и X — некоторое выражение. Тогда выражения $A \cdot X$ и $B \cdot X$ также тождественно равны.

Это правило можно кратко записать в символической форме:

Если $A \equiv B$, то $A \cdot X \equiv B \cdot X$.

Пример 8. Рассмотрим тождество $a^2 - 1 = (a + 1) \cdot (a - 1)$. Домножим обе его части на выражение a. Получим

$$a \cdot (a^2 - 1) = a \cdot (a + 1) \cdot (a - 1),$$
$$a^3 - a = (a - 1) \cdot a \cdot (a + 1).$$

***Вопрос*.** Как можно доказать тождество

$$(x + 1)^3 - x - 1 = x \cdot (x + 1)(x + 2)?$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какие буквенные выражения называют тождественно равными?

2. Как вы понимаете тождество?

3. Как можно записать тождественное равенство двух буквенных выражений?

4. Каковы основные свойства тождественных равенств?

5. Как вы понимаете тождественные преобразования буквенных выражений?

6. Сформулируйте правило подстановки.

7. Сформулируйте правило прибавления к частям тождества одинакового выражения.

8. Сформулируйте правило умножения частей тождества на одинаковое выражение.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что записанное равенство не является тождеством:

а) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$;
б) $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2$;
в) $(a - 1)^2(a - 2)^2 = a^2 - 3a + 2$;
г) $a^2 = b^2 + c^2$;
д)* $|y| = y$;
е)* $|x + 1| = z + 1$.
ё)** $\sqrt{x^2} = x$;
ж)** $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$.

2. Покажите, что записанное равенство является тождеством:

а) $3b - 4b + 5b - 2b = 2b$;

б) $6ab + 3ab = 9ab$;

в) $(2a + b) - (2a - b) = 2b$;

г) $2(3x + 2y) - 3(x - 2(x + y)) = 9x + 10y$;

д) $-3(m + k) - 2(m - k) + 5(m + 2k) = 9k$;

е) $k + (k + 1) + (k + 2) = 3(k + 1)$;

ё)* $(a + x) - (a + 2x) + (a + 3x) - (a + 4x) + ... + (a + 99x) = a + 50x$.

3. Раскройте скобки:

а) $(a + 1)(a + 4)$;

б) $(x + 1)(y + 1)$;

в) $(xy + 1)(x + y)$;

г) $(m + n)(m - 2n)$;

д) $(2p + 3q)(3p + 2q)$;

е) $(1 - 2x)(1 - 3x)$;

ё)* $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$;

ж)* $(x + 1)^4 - (4x + 1)$;

з)* $3 + x(-2 + x(1 + 2x(4 - x)))$.

4.** Докажите, что если два выражения A и B с переменной a тождественно равны, то при замене в тождестве $A = B$ всюду буквы a на выражение X получается тождество.

5. Из данного тождества подстановкой вместо букв указанных выражений получите новое тождество:

а) $x + (x + 1) + (x + 2) = 3(x + 1)$, где $x = a^2 - 1$;

б) $(m - 1)(m - 3) = m^2 - 4m + 3$, где $m = b^3$;

в) $(a + 1)(b + 1) - (a + b) = ab + 1$, где $a = 3x^2$, $b = 4x^2$;

г) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, где $a = x + 1$, $b = x - 1$;

д) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, где $a = m$, $b = -n$;

е)* $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$, где $x = \sqrt{2}$.

6. Докажите тождества:

а) $m^2 + n^2 - (m + n)^2 = -2mn$;

б) $(a - 1)(b - 1) - ab = 1 - a - b$;

в) $(x + y)^2 - 2xy = (x - y)^2 + 2xy$;

г) $3a(a + b) - a^2 = a(2a + 3b)$;

д) $(a - b)^3 = a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3ba^2$.

7. Из данного тождества умножением на заданное выражение получите новое тождество:

а) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ умножить на ab;

б) $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ умножить на n^2;

в) $(a + b) + (a - b) = 2a$ умножить на b;

г) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ умножить на $x^2 + y^2$.

8. Докажите тождества:

а) $m + (m + 1) + (m + 2) + (m + 3) + (m + 4) = 5(m + 2)$;

б) $x - (x + 1) + (x + 2) - (x + 3) + (x + 4) = x + 2$;

в) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

г) $(3a + 4b)^2 = 16b^2 + 24ab + 9a^2$;

д) $(5x - 3y)^2 - (2x + 2y)^2 = (3x - 5y)(7x - y)$;

е) $(m - 1)^2 + m^2 + (m + 1)^2 = 3m^2 + 2$;

ё)* $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$;

ж)* $(ax + by)^2 + (ay - bx) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Среди следующих равенств найдите то, которое является тождеством:

1) $(a + 2b)(2a + b) = 2a^2 + 2ab + 2b^2$; 2) $(a - 2b)(a - b) = a^2 - 3ab - 2b^2$;

3) $(a + b)^2 = a^2 + 3ab + b^2 - ab$; 4) $(2b - a)(a - b) = a^2 + 3ab - 2b^2$.

1.2.** Среди следующих равенств, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, найдите то, которое является тождеством:

1) $\dfrac{aba}{ab} = c$; 2) $\dfrac{|b|^2}{cb} = \dfrac{1}{c}$; 3) $\dfrac{ab + ac}{a} = b + c$; 4) $\dfrac{|b|^3}{b} = b^2$.

1.3.** Среди следующих утверждений выберите верное:

1) если $A(x) = B(x)$, то для любого $C(x)$, $\dfrac{A(x)}{|C(x)|} = \dfrac{B(x)}{|C(x)|}$;

2) если $A(x) \cdot B(x) = (B(x))^2$, то $A(x) = B(x)$;

3) если $4A(x) + 3 = (1 + 5B(x)) - (B(x) - 2)$, то $A(x) = B(x)$;

4) если $A(x) = B(x)$, то $A(x) \cdot B^2(x) = A^2(x) \cdot B(x)$.

1.4. Среди следующих утверждений укажите неверное:

1) если $B(x) = C(x)$, то $(A(x))^2 \cdot B(x) = C(x) \cdot (A(x))^2$;

2) если $2B(x) + 3 + |A(x)| = A(x) + 2B(x) + 3$, то $A(x) \geq 0$;

3) если $2(B(x))^2 + 2|A(x)| + 3 = |B(x)|^2 + (B(x))^2 + 3$, то $A(x) \neq 0$;

4) если $B(x) = C(x)$, то $|B(x)| = |C(x)|$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Укажите все тождества:

1) $(a - b)^2 = a^2 - ab + b^2$; 2) $(2a - b)^2 = b^2 - 4ab + a^2$;

3) $(2a + 2b)^2 = 2a^2 + 2ab + 2b^2$; 4) $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$.

2.2. Укажите все верные утверждения:

1) $(3a - b)^2$ всегда равно $b^2 - 6ab + 9a^2$;

2) если $a^2b^2 = ab$, то $ab = 1$;

3) если $a^2b^2 = |ab|$, то $ab = 1$;

4) если $a = b$, то $a^2 + 2ab + b^2 = (2a)^2$.

2.3.* Укажите все верные утверждения:

1) если $a = bc$, то $abc = (cb)^2$;

2) если $c^2 = abc$, то $c = ab$;

3) если $a = c$, то $(a - b)^2 = (a - c)^2$ для всех b;

4) $|(a^2)^2| = (a^2)^2$.

2.4. Выберите все правильные утверждения:

1) $\dfrac{a^2}{a^2} = 1$, если $a \neq 0$;

2) из $a^2b = ac$ всегда следует $ab = c$;

3) если из $a^2b = ac$ следует $ab = c$ для любых b и c, то $a \neq 0$;

4) из $c = b$ всегда следует $\dfrac{abc}{c} = \dfrac{aba}{b}$.

§ 3. МНОГОЧЛЕНЫ ■

3.1. Одночлен. Рассмотрим некоторые формулы, которые можно встретить в справочниках или учебниках.

Пример 1. Площадь S квадрата со стороной a выражается формулой $S = a^2$.

Пример 2. Объём V прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c выражается формулой $V = abc$.

Пример 3. Площадь S поверхности сферы радиуса R выражается формулой $S = 4\pi R^2$.

Пример 4. Длина пути S, пройденного телом при свободном падении в поле силы тяжести с ускорением g за время t при начальной нулевой скорости выражается формулой $S = \dfrac{1}{2}gt^2$.

В правой части приведённых формул стоят произведения чисел, постоянных и переменных букв.

Числа, буквы и буквенные выражения, которые являются произведением чисел и букв, будем называть *одночленами*.

Примерами одночленов могут служить выражения a^2, abc, $4\pi R^2$, $\dfrac{1}{2}gt^2$.

Вопрос. Какие примеры одночленов вы знаете?

3.2. Стандартная форма одночлена. Понятие степени числа позволяет любому одночлену придать удобный вид.

Пример 5. Рассмотрим одночлен

$$2a \cdot 3b \cdot aa \cdot 4c.$$

Используя основные законы арифметики, получаем

$$2a \cdot 3b \cdot a \cdot a \cdot 4c = (2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot b \cdot c = 24a^3bc.$$

Пример 6. Рассмотрим произведение одночленов $3m^2n$ и $-2mk^3n^2$. Преобразуя, получим новый одночлен:

$$3m^2n \cdot (-2mk^3n^2) = 3 \cdot (-2) \cdot (m^2 \cdot m) \cdot (n \cdot n^2) \cdot k^3 = (-6) \cdot m^3 \cdot n^3 \cdot k^3 = -6m^3n^3k^3$$

Пример 7. Рассмотрим третью степень одночлена $0{,}1ab^2c^3$. Преобразуя, получим новый одночлен:

$$(0{,}1ab^2c^3)^3 = 0{,}1 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot 0{,}1 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot 0{,}1 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^3 =$$
$$= (0{,}1)^3 \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (b^2 \cdot b^2 \cdot b^2) \cdot (c^3 \cdot c^3 \cdot c^3) = 0{,}001a^3b^6c^9.$$

Запись одночлена в виде произведения постоянного числового выражения и степеней различных постоянных или переменных букв будем называть *стандартной формой* одночлена. Обычно числовой коэффициент пишут слева, а если буква входит в одночлен с показателем степени, равным 1, то такой показатель, как правило, не пишут. Стандартную форму иногда называют стандартным видом одночлена.

Вопрос. Как привести к стандартной форме одночлен $\pi R^2 \cdot 2\pi R$, где π – постоянное число?

3.3. Коэффициент. Степень одночлена. Рассмотрим, например, одночлен $-3{,}2 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c$. Запишем его в стандартной форме: $(-3{,}2) \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^1$, считая, что $c = c^1$.

Числовой множитель $-3{,}2$ называют *коэффициентом* этого одночлена.

Сумму показателей степеней переменных букв, равную $3 + 2 + 1$, называют *степенью* этого одночлена.

Разберём ещё несколько примеров.

Пример 8. Одночлен $-m^2n$ имеет коэффициент -1 и степень 3, равную $2 + 1$.

Пример 9. Одночлен $\frac{1}{2}\pi R^2H$, где π — постоянное число, имеет коэффициент $\frac{1}{3}\pi$ и степень 3, равную $2 + 1$.

Пример 10. Одночлен $abcd$ можно записать в виде $1 \cdot a^1 \cdot b^1 \cdot c^1 \cdot d^1$. Следовательно, коэффициент этого одночлена равен 1, а степень равна 4.

Вопрос. Каковы коэффициент и степень одночлена

$$\frac{1}{2}a^3p \cdot \frac{1}{3}b^2q^2 \cdot 6cr^3?$$

3.4.* Индуктивное определение одночлена. Одночлены можно определить шаг за шагом по следующим правилам:

I. Число нуль является особым одночленом и называется *нулевым одночленом.*

II. Любое числовое выражение, не равное нулю, является *одночленом нулевой степени.*

III. Любая буква, обозначающая постоянное ненулевое число, является *одночленом нулевой степени.*

IV. Любая буква, обозначающая переменную, является *одночленом первой степени.*

V. Произведение любого одночлена на нулевой одночлен равно нулевому одночлену.

VI. Если f и g — некоторые ненулевые одночлены, то $f \cdot g$ также одночлен, степень которого равна сумме степеней одночленов f и g.

Коэффициент одночлена нулевой степени считают равным самому одночлену. Коэффициент произведения двух одночленов равняется произведению коэффициентов этих одночленов.

Понятие степени для нулевого одночлена не определяется.

Если одночлен представлен как произведение постоянного числового выражения и степеней переменных букв, то постоянное выражение принято считать коэффициентом. Например, в одночленах 2^2x^3, $(1 + \sqrt{2})ab$ и $2\pi r$ коэффициентами являются выражения 2^2, $1 + \sqrt{2}$ и 2π соответственно.

Вопрос. Как представить одночлен $\frac{1}{3}\pi R^2 H$, где π — постоянное число, в виде произведения двух одночленов?

3.5. Понятие многочлена. Сумма одночленов называется *многочленом*. Из соображений удобства одночлены также называют многочленами.

Например, многочленами являются:

$$abc,\quad 3a - 2b;\quad m^2 + 4n^2;\quad pgr + p + q + r.$$

Вопрос. Какому многочлену равно буквенное выражение

$$(3a - 2b) \cdot (2a - 3b)?$$

3.6. Сумма, разность и произведение многочленов. Тождественными преобразованиями сумму, разность и произведение многочленов можно также представить в виде многочлена. Например,

$$(5m - 6n) \cdot (8k^2 - m) = 5m \cdot (8k^2 - m) - 6n \cdot (8k^2 - m) =$$
$$= (5m \cdot 8k^2 - 5m \cdot m) - (6n \cdot 8k^2 - 6n \cdot m) = (40mk^2 - 5m^2) - (48nk^2 - 6mn) =$$
$$= 40mk^2 - 5m^2 - 48mk^2 + 6mn.$$

Верны следующие правила:

1) Сумма двух многочленов равна некоторому многочлену.

2) Разность двух многочленов равна некоторому многочлену.

3) Произведение двух многочленов равно некоторому многочлену.

Вопрос. Какому многочлену равно произведение $(3b - 1)(3b + 1)$?

3.7. Подстановка многочлена в многочлен. Пусть $f = x^2 - x - 1$. Заменим букву x на многочлен $x^2 - x - 1$. Получим

$$(x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - x - 1) - 1 = (x^2 - x - 1) \cdot (x^2 - x - 1) - (x^2 - x - 1) - 1 =$$
$$= x^2(x^2 - x - 1) - x(x^2 - x - 1) - 1(x^2 - x - 1) - (x^2 - x - 1) - 1 =$$
$$= x^4 - x^3 - x^2 - x^3 + x^2 + x - x^2 + x + 1 - x^2 + x + 1 - 1 =$$
$$= x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1.$$

Как и в этом примере, в общем случае верно правило:

При одновременной подстановке в многочлен вместо переменной буквы некоторого многочлена получится новый многочлен.

Вопрос. Какой многочлен получится, если в многочлен $a^2 + 2abc + 3$ вместо буквы a подставить выражение $2b^2$?

3.8. Стандартная форма или стандартный вид многочлена. Два одночлена называются *подобными*, если они либо равны, либо их можно записать так, что они будут отличаться только коэффициентами.

Распределительный закон умножения позволяет сумму двух подобных одночленов, входящих в многочлен, заменить на одно слагаемое, или, как говорят в таком случае, *привести подобные слагаемые*.

Пример 11. Приведём подобные слагаемые в многочлене $x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x^2 - 3xy - y^2$.

Заменим каждую сумм подобных слагаемых на одно слагаемое:

$$x^2 + (-2x^2) = 1x^2 + (-2)x^2 = (1 + (-2))x^2 = (-1)x^2 = -x^2;$$
$$3xy + (-3xy) = (3 + (-3))xy = 0 \cdot xy = 0;$$
$$2y^2 + (-y^2) = (2 + (-1)) \cdot y^2 = 1 \cdot y^2 = y^2.$$

Таким образом, $x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x^2 - 3xy - y^2 = -x^2 + y^2$. Полученный многочлен $-x^2 + y^2$ не имеет подобных слагаемых.

Будем считать, что многочлен имеет *стандартную форму*, если этот многочлен не имеет подобных слагаемых, при этом каждый входящий в него одночлен записан в стандартной форме.

Каждый многочлен тождественными преобразованиями можно привести к стандартной форме. Иногда стандартную форму многочлена называют стандартным видом многочлена.

Вопрос. Какова стандартная форма многочлена, равного $(x^2 - x - 1)^2$?

3.9. О степенях слагаемых в записи многочленов. После приведения подобных слагаемых наибольшая степень одночленов, составляющих многочлен, может уменьшиться. Например, многочлен

$$x^3 + x^2 + x + 1 - 1 - x^3$$

равен многочлену $x^2 + x$.

У первоначального многочлена есть слагаемое x^3, степень которого равна 3, а у многочлена $x^2 + x$ все слагаемые имеют степень не больше 2.

Вопрос. Чему равны степени слагаемых многочлена, равного выражению $(x^2 + y^3)^2$?

3.10. Равенство многочленов.** Иногда тождественное равенство многочленов определяют следующим образом.

Два многочлена в стандартной форме тождественно равны только тогда, когда можно переставить местами слагаемые и сомножители у слагаемых одного многочлена так, что при этом получится второй многочлен.

Например, по этому определению многочлены $x^2 + xy + y^2$ и $y^2 + yx + x^2$ тождественно равны, а многочлены $x^2 + y^2$ и $x - y^2$ не являются тождественно равными.

Можно доказать, что приведённое в данном пункте определение тождественного равенства многочленов совпадает с определением тождественного равенства буквенных выражений, которое дано в пункте 2.1. Однако доказательство этого утверждения сложное.

Вопрос. Как доказать, что многочлены $x^2 + y^2$ и $x^2 - y^2$ не являются тождественно равными, если применять определение из пункта 2.1?

Контрольные вопросы и задания

1. Какое буквенное выражение называют одночленом?
2. Что называют стандартной формой одночлена?
3. Как определяется степень одночлена?
4. Что такое коэффициент?

5. Какие буквенные выражения называют многочленами?

6. Покажите на примерах, что сумма, разность и произведение двух многочленов равны некоторым многочленам.

7. Какие слагаемые называют подобными?

8. Что называют приведением подобных слагаемых?

9. Какую форму записи называют стандартной формой многочлена?

Задачи и упражнения

1. Найдите степень одночлена:

а) m^3nk^2; б) $-3amx$;

в) $7{,}3pq^2r^3$; г) $4c^2f^2g^4$;

д)* $a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \cdot a_4^4 \cdot \ldots \cdot a_{10}^{10}$; е)* $a_1 \cdot a_2^4 \cdot a_3^9 \cdot a_4^{16} \cdot \ldots \cdot a_{10}^{100}$.

2. Приведите одночлен к стандартной форме:

а) $-(3a) \cdot (2b)^3 \cdot 0{,}25ab^2$; б) $(mn^2)^2$;

в) $(-3{,}2a^2b)^2 \cdot (-0{,}5b)^3$; г) $\left(0{,}6m \cdot \dfrac{2}{3}mn^2\right)^2$;

д) $(-a^3bc^2)^3$; е) $a \cdot (ab)^2 \cdot (abc)^3$;

ё) $m^3 \cdot (mn^2)^2 \cdot mnk^3$.

3. Найдите коэффициент и степень одночлена:

а) $2a \cdot ((-3a) \cdot (bc^2)^2 \cdot 2d)^2$; б) $(-0{,}25m^2) \cdot 6mk \cdot (-4k^2)^2$;

в) $1{,}1a \cdot 1{,}2b^2 \cdot 1{,}3c^3$; г) $\dfrac{1}{2} \cdot m \cdot \dfrac{2}{3} \cdot n^2 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot k^3 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot l^4$.

4. Найдите коэффициент одночлена, где буквы a и b обозначают постоянные числа:

а) $am \cdot (-bn^2) \cdot abk$; б)$x^2 \cdot (ay)^2 \cdot (abm)^3$;

в) $ap \cdot 2abpq \cdot 3abcpqr$; г)$(2bx^2)^3 \cdot (5a^2y)^2$.

5. Запишите буквенное выражение в виде многочлена:

а) $(a - 2b)(3a + b)$; б) $m(2m + n) - n(2m - n)$;

в) $(a^2 + bc)(m^2 - nk)$; г) $(x^2 - ax)(x^2 + bx)$;

д) $(a(a + b) - b(a - b))a^2$; е)* $(m^2 - nk)(n^2 - mk)(k^2 - mn)$;

ё) $(a + (a + b)^2)(a - b)$; ж) $(x^2 + 2xy)^2 - (2xy)^2$.

6. Приведите подобные слагаемые, если это возможно:

а) $3a - 4b + a^2 + b^2$;

б) $abc - 2ac + 3cab - 4bc$;

в) $x^2y^2 - 5xy^2 + 3(xy)^2 - 4yxy$;

г) $2mn^2 + 5m^3n + 7m^2\,n^2 + 3nmnm + 6nm^3 + 4n^2m$;

д) $2x^4 - 3x^3 + 5x^5 - 6x^2 + 7x^4 - 9x + 5x^3 - 7 + 3x - 9x^2 + 1$;

е) $a^5 + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + 4a^4b + b^5 + 6a^2b^3 + a^4b + 4a^3b^2 + 4ab^4$.

7. Найдите суммы и разности многочленов:

а) $(a^2 + 3ab + 5b^2) + (3ab - 4a^2 - 2b^2)$;

б) $(x^3 - 5x^2 - 6x - 9) - (2x^3 - 3x^2 - 4x - 10)$;

в) $(3a^2b - 4ab^2 + b^3 - a^3) - (7a^3 + 3ab^2 - 2a^2b + 2b^3)$;

г) $(x^2 + 2y^2 - 5x + 9y - 4) - (2x^2 - y^2 + 3x - 4y + 3)$;

д) $(6a^2 - 5ab + b^2) - (3b^2 - 2ab + 2a^2) - (4ab - a^2 - b^2)$;

е) $(2mn - 3n^2) - ((5mn - 2m^2) - (4mn - 3n^2))$.

8. Найдите произведение многочленов, упростив до стандартной формы:

а) $(3mn - n^2)(m^2 + 2mn)$; б) $(a^2 + bc)(b^2 - ac)$;

в) $(x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)$; г) $(a^2 + b^2 + c^2)^2$;

д) $(m^3 + 2)(m^6 - 2m^3 + 4)$; е) $(x + 2)(x^3 - 2)$;

ё) $(pq + qr + pr)(p + q + r)$; ж) $(b - 1)(b^2 - 1)(b^3 - 1)$;

з) $(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$.

9. Выполните указанные подстановки и запишите полученные многочлены в стандартной форме:

а) $a^3 - 3ab^2 + 2a^2b$, где $a = -m$, $b = -n$;

б) $2m^3 - 3mn^2 + 4n^3$, где $m = -n$, $n = -n$;

в) $x^2 - 3x + 2$, где $x = a - b$;

г) $z^2 - 4z + 6$, где $z = -y$;

д)* $p^2 + pq + q^2$, где $p = x + 2y$, $q = x - 2y$;

е)* $a^2 - 2ab$, где $a = x + 1$, $b = 2x - 1$;

ё)** $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, где $x = a + 1$;

ж)** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, где $a = m - n$, $b = n - k$, $c = k - m$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Найдите степень одночлена ab^3cde^2:

1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 8.

1.2. Результатом какого действия не обязательно является многочлен?

1) сложение двух многочленов;

2) деление многочлена на число, не равное 0;

3) возведение многочлена в квадрат;

4) деление многочлена на многочлен.

1.3. Какой из следующих многочленов является результатом подстановки выражения $2y + 1$ вместо переменной x в многочлен $2x^2 - 3x - 1$?

1) $8y^2 + 2y + 2$; 2) $8y^2 - 2y - 2$;

3) $8y^2 + 2y - 2$; 4) $4y^2 + 2y - 2$.

1.4. Какой из одночленов не записан в стандартной форме?

1) a^3b^2; 2) cb^2a^3; 3) $4a^3b^2$; 4) a^3b^2ca.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Укажите все выражения, являющиеся одночленами:

1) $a^3b^2c \cdot 4$; 2) $(a \cdot a \cdot a \cdot b) \cdot b \cdot c$;

3) $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b - c$; 4) $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b : c$.

2.2. Укажите все многочлены, значением которых при $a = 1$ и $b = 2$ является 32:

1) $(b - a)(b + a) \cdot 3 + 23$; 2) $(a - b)(a + b) \cdot 3 + 23$;

3) $ab^2 \cdot (a - b) + 27$; 4) $a + a^2 + 3ab^3 + b^2 + 1$.

2.3. Результатом подстановки в некоторый многочлен выражения $x + 2$ вместо переменной z является $3x^2 + 9x + 8$. Этим многочленом может быть:

1) $(2z + 1)(z + 1) + (z + 1)^2 - 8z$; 2) $(z + 1)^2 + (z + 2)^2 + (z - 1)^2$;

3) $3z^2 - 3z + 2$; 4) $3(z - 1)(z + 2) + 6(1 - z) + 2$.

2.4. Укажите все верные утверждения:

1) $(a + 2b)(a - 3b) = a^2 - ab - 6b^2$;

2) выражение $a \cdot a^3 \cdot b \cdot a \cdot b$ является одночленом;

3) $8c^3 - b^3 = (2c - b)(4c^2 - cb + b^2)$;

4) $8c^3 + b^3 = (2c + b)(4c^2 - 2cb + b^2)$.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ ДВУЧЛЕНА $a^n - b^n$

4.1. Разложение на множители двучлена $a^n - 1$. Вспомним тождество

$$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1).$$

Возьмём после этого выражение $a^3 - 1$ и запишем равенства:

$$a^3 - 1 = a^3 - a^2 + a^2 - 1 = (a \cdot a^2 - 1 \cdot a^2) + (a - 1) \cdot (a + 1) =$$
$$= (a - 1) \cdot a^2 + (a - 1)(a + 1) = (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1).$$

В результате получаем новое тождество:

$$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1).$$

Рассмотрим теперь выражение $a^4 - 1$ и запишем равенства:

$$a^4 - 1 = a^4 - a^3 + a^3 - 1 = (a \cdot a^3 - 1 \cdot a^3) + (a^3 - 1) =$$
$$= (a - 1) \cdot a^3 + (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1) = (a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1).$$

И так продолжим дальше.

Допустим, что получено тождество

$$a^{63} - 1 = (a - 1) \cdot (a^{62} + a^{61} + \dots + a + 1),$$

где многоточие означает, что по указанному закону записывается сумма всех шестидесяти трёх слагаемых. Тогда для выражения $a^{64} - 1$ сможем записать равенства:

$$a^{64} - 1 = a^{64} - a^{63} + a^{63} - 1 = (a - 1)a^{63} + (a - 1) \cdot (a^{62} + a^{61} + \dots + a + 1) =$$
$$= (a - 1) \cdot (a^{63} + a^{62} + a^{61} + \dots + a + 1).$$

Для любого натурального числа n, большего 1, справедливо тождество:

$$\mathbf{a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).}$$

Иногда это тождество называют формулой разложения многочлена $a^n - 1$ на два множителя.

Вопрос. Какое тождество получится, если в последнее равенство вместо a подставить b^2?

4.2.* Разложение на множители двучлена в общем виде. Рассуждения предыдущего пункта можно повторить для выражений вида $a^n - b^n$.

В результате для любого натурального числа n, которое больше 1, получаем формулу разложения двучлена $a^n - b^n$ на два множителя:

$$\mathbf{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).}$$

Вопрос. Как будет выглядеть последняя формула при $n = 7$, $a = x$ и $b = -y$?

4.3. Использование разложения $2^{64} - 1$ для подсчёта числа зёрен из легенды о шахматах. Запишем тождество

$$a^{64} - 1 = (a - 1)(a^{63} + a^{62} + \dots + a + 1).$$

Подставим вместо переменной a число 2 и получим числовое равенство

$$2^{64} - 1 = (2 - 1)(2^{63} + 2^{62} + \dots + 2 + 1).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

Вспомним теперь шахматную легенду, по которой изобретатель шахматной игры запросил в награду за первую клеточку 1 зерно риса, за вторую — 2 зерна, за третью — 2^2 зёрен и так далее: за каждую очередную клеточку в два раза больше, чем за предшествующую ей.

Общее число зёрен представляет собой сумму

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{62} + 2^{63} = 2^{64} - 1,$$

как это следует из ранее записанного равенства.

Вычислив значение $2^{64} - 1$, сможем найти число зёрен, которое запросил в награду изобретатель шахматной игры.

Вопрос. Как найти сумму $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{19}$?

4.4.* Применение разложения двучлена $a^n - b^n$ к решению некоторых задач на делимость. Разберём ещё одно применение формулы

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Пример 1. Покажем, что число $5^{20} - 2^{20}$ делится на 3.

Подставим в формулу значения $n = 20$, $a = 5$, $b = 2$. Получим

$$5^{20} - 2^{20} = (5 - 2)(5^{19} + 5^{18} \cdot 2 + \ldots + 5 \cdot 2^{18} + 2^{19}).$$

Обозначив через M натуральное число, равное $5^{19} + 5^{18} \cdot 2 + \ldots + 5 \cdot 2^{18} + 2^{19}$, получим

$$5^{20} - 2^{20} = 3 \cdot M.$$

Отсюда следует, что стоящее слева натуральное число $5^{20} - 2^{20}$ делится на 3 без остатка.

Пример 2. Покажем, что число $7^{100} - 2^{100}$ делится на 45. Для этого заметим, что

$$7^{100} = (7^2)^{50} = 49^{50},\ 2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50}.$$

Подставим в формулу разложения на множители $a^n - b^n$ значения $n = 50$, $a = 49$, $b = 4$. Получим

$$49^{50} - 4^{50} = (49 - 4)(49^{49} + 49^{48} \cdot 4 + \ldots + 49 \cdot 4^{48} + 4^{49}).$$

Обозначив через M натуральное число, равное $49^{49} + 49^{48} \cdot 4 + \ldots + 49 \cdot 4^{48} + 4^{49}$, получим

$$7^{100} - 2^{100} = 49^{50} - 4^{50} = 45 \cdot M.$$

Отсюда следует, что стоящее слева натуральное число $7^{100} - 2^{100}$ делится на 45 без остатка, что и требовалось показать.

Вопрос. Как доказать, что $3^{105} + 4^{105}$ делится на 7?

4.5. Примеры использования разложения двучлена $a^2 - b^2$. Вернёмся к тождеству

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Поменяем местами правую и левую части и получим новое тождество

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Прибавим к обеим частям первого тождества выражение b^2. Получим ещё одно новое тождество

$$a^2 = (a - b)(a + b) + b^2.$$

Покажем, как полученные тождества иногда позволяют облегчить вычисления.

Пример 3. Найдём $\sqrt{68^2 - 32^2}$.

Подставим в тождество $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ значения $a = 68$, $b = 32$. Получим

$$68^2 - 32^2 = (68 - 32) \cdot (68 + 32) = 36 \cdot 100 = 6^2 \cdot 10^2 = 60^2.$$

Отсюда $\sqrt{68^2 - 32^2} = 60$.

Пример 4. Найдём произведение $157 \cdot 163$.

Заметим, что $157 = 160 - 3$, $163 = 160 + 3$. Если теперь в тождество $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ подставить значения $a = 160$ и $b = 3$, получим

$$(160 - 3)(160 + 3) = 160^2 - 3^2 = (16 \cdot 10)^2 - 3^2 =$$

$$= 16^2 \cdot 10^2 - 3^2 = 256 \cdot 100 - 9 = 25\,600 - 9 = 25\,591.$$

В итоге: $157 \cdot 163 = 25\,591$.

Пример 5. Найдём 987^2.

В тождество $a^2 = (a - b)(a + b) + b^2$ подставим значения $a = 987$, $b = 13$, заметив, что $13 = 1000 - 987$. Получим

$$987^2 = (987 - 13)(987 + 13) + 13^2 = 974 \cdot 1000 + 169 = 974\,169.$$

Вопрос. Чему равен катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 136 мм, а второй катет 64 мм?

Контрольные вопросы и задания

1. Как разложить на множители многочлен $a^2 - b^2$?

2. Как записать разложение на два множителя многочлена $a^n - 1$ при

а) $n = 4$; б) $n = 5$; в)* $n = 100$?

3. Как записать разложение на два множителя многочлена $a^3 - b^3$?

4.* Как записать разложение на два множителя многочлена $a^n - b^n$?

5.** Как вычислить сумму $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{19}$?

6.* Как доказать, что $11^n - 4^n$ делится на 7 при любом натуральном значении n?

Задачи и упражнения

1. Разложите на два множителя:

а) $m^2 - n^2$; б) $4a^2 - 9b^2$; в) $64p^2 - 100q^2$;
г) $25a^2 - b^4$; д) $16m^2 - 9a^2b^2$; е)* $7p^2 - 8q^2$.

2. Разложите на два множителя:

а) $p^3 - q^3$; б) $8a^3 - 27b^3$;
в) $p^3 - 1000q^3$; г) $8a^6 - b^9$;
д) $a^3 + b^3$; е) $8m^3 + 27n^3$;
ё)* $a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2)$; ж)* $m^3 + 8n^3 + 4(m^2 - 4n^2)$;
з)* $27a^3 + 30a^2b + 20ab^2 + 8b^3$.

3. Разложите $a^4 - b^4$ на три множителя.

4.** Разложите $a^6 - b^6$ на четыре множителя.

5. Разложите на два множителя:

а) $16a^4 - b^4$; б) $m^8 - n^8$; в) $(ab)^5 - 1$;
г)* $(2a)^7 - (3b)^7$; д)* $a^{25} - m^{25}$.

6. Разложите на два множителя $m^9 + n^9$.

7. Найдите суммы:

а) $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$; б) $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^8$;
в)* $1 - 2 + 2^2 - ... + 2^{20} - 2^{21}$; г)* $1 - 3 + 3^2 - ... + 3^8 - 3^9$;
д)** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{20}}$; е)** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2^{19}} + \frac{1}{2^{20}}$;
ё)** $1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^8$.

8.** Докажите, что если $a = m\sqrt{2} + n\sqrt{3}$, $b = m\sqrt{2} - n\sqrt{3}$, где m и n — целые числа, то $a^2 + b^2$ — целое число.

9.* Разложите на множители: а) $4a^2 - 3b^2$; б) $5a^2 - 2b^2$.

10. Докажите, что

а) $132^{50} - 105^{50}$ делится на 9; б) $11^{11} - 5^{11}$ делится на 6;
в) $7^{49} + 4^{49}$ делится на 11.

11.** Докажите, что

а) $3^{100} - 2^{100}$ делится на 13; б) $7^{1000} - 5^{1000}$ делится на 3;
в) $2^{60} + 7^{30}$ делится на 13; г) $3^{105} + 4^{105}$ делится на 181;
д) $7^{1000} - 5^{1000}$ делится на 53.

12. Вычислите:

а) $\sqrt{29^2 - 20^2}$; б) $\sqrt{65^2 - 56^2}$; в) $\sqrt{125^2 - 44^2}$.

13. Найдите произведение:

а) $19 \cdot 21$; б) $43 \cdot 57$; в) $64 \cdot 56$; г) $95 \cdot 105$.

14. Найдите:

а) 18^2; б) 57^2; в) 99^2; г) 1995^2; д) 1999^2; е) 2003^2.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Найдите верное разложение:

1) $8a^3 - c^3 = (4a^2 + a^2c + c^2)(2a - b)$;

2) $8a^3 - c^3 = (4a^2 + 2ca + c^2)(2a + c)$;

3) $8a^3 - c^3 = (4a^2 + 4ac + c^2)(2a - c)$;

4) $8a^3 - c^3 = (c^2 + 2ca + 4a^2)(2a - c)$.

1.2. Какая из сумм равна $5^4 - 1$?

1) $3 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$;

2) $7 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$;

3) $4 \cdot (1 + 5 + 5^2 + 5^3)$;

4) $6 \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4)$.

1.3. Какое из следующих утверждений верно?

1) $19^{11} - 10^{11}$ делится на 2;

2) $17^{11} - 11^{11}$ делится на 3;

3) $15^{11} - 12^{11}$ делится на 5;

4) $126^{11} - 125^{11}$ делится на 3.

1.4. Какое из следующих утверждений неверно?

1) $17^4 - 12^4$ делится на 5;

2) $58^5 - 3^5$ делится на 5;

3) $11\,052 \cdot 11\,048 = 11\,050^2$;

4) $49^{100} - 4^{100}$ делится на 5.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Найдите верные разложения:

1) $9a^2 - 9b^2 = (3a - 3b)(3a + 3b)$;

2) $121a^2 - 4b^2 = (11a + 2b)(11a - 2b)$;

3) $121a^3 - 4b^3 = (11a - 2b)(11a^2 + 22ba + 2b^2)$;

4) $8a^3 + 27b^3 = (2a + 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^3)$.

2.2. Какие из следующих равенств верны?

1) $(7^{11} + 7^{10} + 7^9 + \ldots + 7 + 1) = (7^{12} - 1) : 6$;

2) $5^{120} + 5^{119} + 5^{118} + \ldots + 5 + 1 = (5^{120} - 1) : 4$;

3) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 = ((-2)^5 - 1) : (-3)$;

4) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^9 = (3^{10} - 1) : 3$.

2.3. Укажите все верные утверждения:

1) $25^2 - 13^2 = 38 \cdot 12$;
2) $39^2 - 25 \cdot 53 = 14^2$;
3) $20^2 - 12 \cdot 43 = 15^2$;
4) $1000^2 - 812 \cdot 1088$ делится на 4.

2.4. Укажите все неверные утверждения:

1) $1232^2 - 107^2$ делится на 5;
2) $105^2 - 40^2$ делится на 3;
3) $11\,913^2 = 11\,900 \cdot 1926$;
4) $511^2 - 510^2 = 1021$.

§ 5. БИНОМ НЬЮТОНА

5.1. Квадрат суммы и его геометрический смысл. Вспомним тождество

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

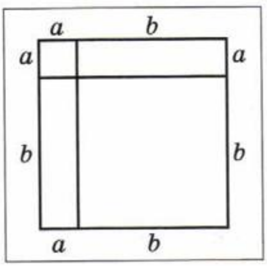


Рис. 1

Это тождество иногда называют *формулой сокращенного возведения суммы двух чисел в квадрат* или *формулой квадрата суммы*. При положительных a и b формула имеет наглядный геометрический смысл. Посмотрите на рис. 1. На нём квадрат со стороной $a+b$ разбит на квадрат со стороной a, квадрат со стороной b и два равных прямоугольника со сторонами a и b. По свойству площадей получаем

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

то есть формулу, совпадающую с формулой квадрата суммы двух чисел.

Вопрос. Как геометрически при положительных a и b объяснить равенство $(2a+b)(a+2b) = 2a^2 + 5ab + 2b^2$?

5.2. Квадрат разности. Возьмём формулу

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Подставим $a = m$, $b = -n$ и получим

$$(m + (-n))^2 = m^2 + 2m(-n) + (-n)^2$$

или

$$(m-n)^2 = m^2 - 2nm + n^2.$$

Последняя формула может быть полезной при возведении в квадрат разности двух выражений.

Например:

$$(a^2 - 2ab)^2 = (a^2)^2 - 2a^2 \cdot 2ab + (2ab)^2 = a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2.$$

Вопрос. Какому выражению равно $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$?

5.3. Примеры применения формул квадрата суммы и квадрата разности. Формулы квадрата суммы или разности двух чисел иногда удобно применять при возведении чисел в квадрат.

Пример 1. $(101)^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 + 1 = 10\,201.$

Пример 2. $(0{,}95)^2 = (1 - 0{,}05)^2 = 1 - 2 \cdot 0{,}05 + (0{,}05)^2 =$

$$= 1 - 0{,}1 + 0{,}0025 = 0{,}9025.$$

Пример 3.

$$38^2 = (40 - 2)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 - 160 + 4 = 1444.$$

Вопрос. Чему равно 85^2?

5.4. Вывод формулы для $(a + b)^3$. Воспользуемся формулой для квадрата суммы двух чисел a и b, чтобы получить формулу для куба суммы этих чисел.

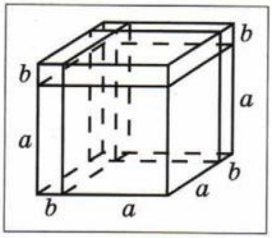


Рис. 2

Запишем равенства

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

В результате получаем формулу

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Вопрос. Как можно получить формулу для куба разности двух чисел m и n, то есть для $(m - n)^3$?

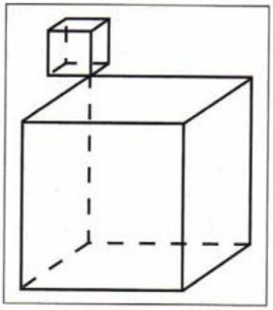


Рис. 3

5.5. Геометрическая иллюстрация куба суммы двух чисел.** Формуле куба суммы также можно дать геометрическую иллюстрацию.

Пусть a, b положительны. Рассмотрим куб с ребром $a + b$ и разобьём его на 8 частей, как это условно изображено на рис. 2.

Одна часть является кубом с ребром a, а ещё одна часть — кубом с ребром b. Эти части изображены на рис. 3. Три части являются прямоугольными параллелепипедами с рёбрами a, b, b. Эти части изображены на рис. 4.

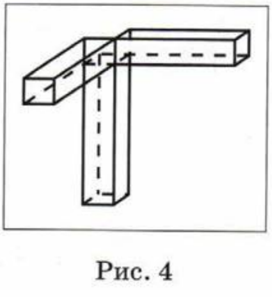


Рис. 4

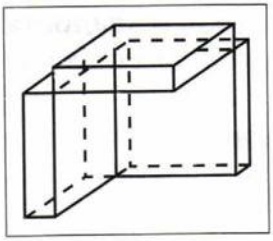


Рис. 5

Три части являются прямоугольными параллелепипедами с рёбрами a, a, b. Эти части изображены на рис. 5.

По свойству объёма получаем формулу для $(a+b)^3$.

Вопрос. Как дать геометрическую иллюстрацию формуле $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ для положительных $a > b$?

5.6. Вывод формулы для $(a+b)^4$. Воспользуемся формулой для куба суммы двух чисел a и b, чтобы получить формулу для $(a+b)^4$.

Запишем равенства

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$
$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

В результате получаем формулу

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

где слагаемыми являются одночлены в стандартной форме, расположенные по возрастанию степеней буквы b (или, что то же самое, по убыванию степеней буквы a).

Намеченный процесс возведения в степень выражения $a + b$ нетрудно продолжить: получив формулу для $(a+b)^4$, можно найти формулу для $(a+b)^5$ и так далее.

Многочлен $a + b$ иногда называют *биномом*, так как $a + b$ является суммой двух слагаемых. Представления в стандартной форме многочленов $(a+b)$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ и так далее называют формулами *бинома Ньютона*.

Вопрос. Какие формулы бинома Ньютона вы знаете?

5.7. Биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля. Запишем разложения $(a+b)^n$ при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$:

$$a + b = 1 \cdot a + 1 \cdot b;$$
$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2;$$
$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3;$$
$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4.$$

Заполним по строкам треугольную таблицу, составленную из коэффициентов этих разложений, добавив строку с номером 0, состоящую из одного числа 1:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\;1 \\ 1\;2\;1 \\ 1\;3\;3\;1 \\ 1\;4\;6\;4\;1 \end{array}$$

Получим часть арифметического треугольника с нулевой по четвёртую строку, известного более двух тысяч лет.

Укажем следующие важные свойства этой части арифметического треугольника:

1) По краям строк треугольника стоят единицы.

2) В каждой строке числа, равноудалённые от начала и конца строки, одинаковы.

3) В каждой строке, начиная с номера 2, всякое число строки, кроме начального и последнего, получается сложением находящихся слева и справа от него двух чисел предыдущей строки.

Для строки с номером 4 проверка свойства 3) выглядит так: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$.

Можно продолжить заполнение строк арифметического треугольника: в строке с номером 5 поместим коэффициенты разложения $(a + b)^5$, в строке с номером 6 — коэффициенты разложения $(a + b)^6$, ..., в строке с номером n поместим коэффициенты разложения $(a + b)^n$. Оказывается, для всех строк арифметического треугольника выполняются свойства 1—3.

Числа, стоящие в строках этого треугольника, называются *биномиальными коэффициентами*.

Французский математик XVII века Блёз Паскаль посвятил арифметическому треугольнику и его свойствам специальное сочинение «Трактат об арифметическом треугольнике». Благодаря этому труду свойства арифметического треугольника получили широкую известность среди математиков, а сам треугольник стали называть треугольником Паскаля.

Вопрос. Какой вид имеет формула бинома Ньютона для $(a + b)^5$?

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формулу квадрата суммы двух чисел.

2. Запишите формулу квадрата разности двух чисел.

3. Какие формулы бинома Ньютона вы знаете?

4. Какой вид имеет арифметический треугольник Паскаля?

5. Каковы свойства чисел арифметического треугольника?

6. Как по пятой строке арифметического треугольника получить его шестую строку?

Задачи и упражнения

1. Подставьте в формулу $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ выражения:

а) $a = -2x$; $b = 3y$; б) $a = x + 1$; $b = x - 1$;

в) $a = m + n$; $b = m - n$; г) $a = 2a$; $b = 1$;

д) $a = 0{,}1m$; $b = -0{,}2m$; е) $a = 2x + 3y$; $b = 3x - 2y$.

2. Раскройте скобки:

а) $(2a - 3b)^2$; б) $(3 + 2x)^2$; в) $(3 - 2x)^2$;

г) $(x^2 - 2)^2$; д) $(4m + 5n)^2$; е) $(3a^2b - 4ab^2)^2$;

ё)** $(x^3 - 4x^2)^2$; ж)** $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

3. Представьте в виде квадрата некоторого выражения:

а) $x^2 + 6xy + 9y^2$; б) $9a^2 - 6ab + b^2$;

в) $m^2 - 4m + 4$; г) $16 + 24a + 9a^2$;

д)** $(x^2 + 1)^2 + 2x^2 + 3$; е)* $3a^2 + 2\sqrt{6}ab + 2b^2$;

ё)** $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

4.* Докажите формулу $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$.

5. Раскройте скобки:

а) $(x + 2y)^3$; б) $(2x - y^2)^3$; в) $(3a + 2b)^3$;

г) $(3a^2 - b^2)^3$; д) $(4m - 2mn)^3$; е)*$(x^2 + x + 1)^3$.

6.** Докажите, что

а) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \sqrt{2} - 1$; б) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$.

7. Раскройте скобки:

а) $(a - b)^4$; б) $(m - 2n)^4$; в)* $(a + 2b)^4 + (a - 2b)^4$;

г)*$(x + 2)^4 - (x - 2)^4$; д)* $(x^2 - 6x + 9)^2$.

8.* Раскройте скобки:

а) $(x^2 + 2xy + y^2)(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$; б) $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)^2$.

9.** а) Проверьте, что $\sqrt{26} - 5 < \dfrac{1}{10}$;

б) докажите, что $(\sqrt{26} + 5)^3 \approx 1030$ с избытком с точностью до 10^{-3};

в) найдите $(\sqrt{26} + 5)^{10}$ с точностью до 10^{-10}.

10.** Напишите формулу для:

а) $(a+b)^5$; б) $(a-2b)^5$.

11.* Найдите произведения, не прибегая к длинным вычислениям:

а) $303 \cdot 297$; б) $4005 \cdot 3995$.

12. Найдите в треугольнике Паскаля:

а)* третье число слева в 7-й строке;

б)* среднее число в 9-й строке;

в) крайнее правое число в 91-й строке;

г)* второе справа число в 91-й строке;

д)** третье справа число в 50-й строке.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Укажите коэффициенты в разложении $(c+d)^3$:

1) 1 3 1; 2) 1 2 3 1; 3) 1 3 3 1; 4) 1 3 2 1.

1.2. Укажите коэффициенты в разложении $(c-2d)^2$:

1) 1 −2 4; 2) 1 −4 −4; 3) 3 −1 4 4; 4) 1 −4 4.

1.3. Укажите правильное разложение:

1) $108^2 = 100^2 + 800 + 64$; 2) $108^2 = 110^2 - 4 \cdot 110 + 4$;

3) $45^2 = 55^2 - 250 + 25$; 4) $70^2 = 50^2 + 80 \cdot 50 + 20^2$.

1.4. Какой вид имеет строка биномиальных коэффициентов для показателя степени 4?

1) 1 2 3 2 1; 2) 1 3 5 3 1; 3) 1 4 6 4 1; 4) 1 5 10 5 1.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие строки не являются строками треугольника Паскаля?

1) 1 3 3 1; 2) 1 3 1; 3) 2 1; 4) 1 5 10 5 1.

2.2. Укажите все верные равенства:

1) $205^2 = 210 - 420 + 1$; 2) $209^2 = 210^2 - 418 + 1$;

3) $305^2 = 300^2 + 3005 + 20$; 4) $305^2 = 400^2 - 190 \cdot 400 + 95^2$.

2.3. Укажите все неверные равенства:

1) $(1-2)^3 = -(1 + 2 - 2^2)$;

2) $(7-5)^3 = 2(7^2 - 35 + 5^2)$;

3) $(2a-b)^3 = (2a-b)(4a^2 - 2ab + b^2)$;

4) $(2a+3b)^3 = (3b+2a)(9b^2 - 6ab + 4a^2)$.

2.4.** Какие строки чисел представляют собой строки коэффициентов разложения $(a-b)^n$ для некоторого n?

1) 1 −4 +4 −1; 2) 1 −3 +3 −1; 3) 1 2 1; 4) 1 −4 +6 −4 +1.

Глава 4

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В этой главе вы найдёте признаки равенства треугольников, а также примеры геометрических задач, в частности, примеры решения задач на построение треугольников.

§ 1. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1.1. Первый признак. В 6 классе вы уже изучали признак равенства треугольников. Напомним его:

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Традиционно этот признак называют *первым признаком равенства треугольников.* Он означает, что если для двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1 \text{ и } \angle BAC = \angle B_1A_1C_1, \qquad (1)$$

то можно сделать копию треугольника ABC, которая при наложении совпадёт с треугольником $A_1B_1C_1$ (рис. 1). Иными словами, существует перемещение треугольника ABC, при котором его вершины A, B, C совмещаются соответственно с вершинами A_1, B_1, C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

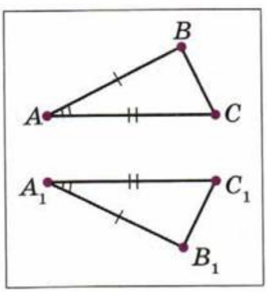


Рис. 1

Наглядно перемещение можно представлять себе как передвижение копии треугольника ABC на плоскости или в пространстве до совпадения с треугольником $A_1B_1C_1$.

Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ вместе с равенствами (1) будут верны также и другие равенства (рис. 2):

$$BC = B_1C_1,\ \angle ABC = \angle A_1B_1C_1,\ \angle ACB = \angle A_1C_1B_1.$$

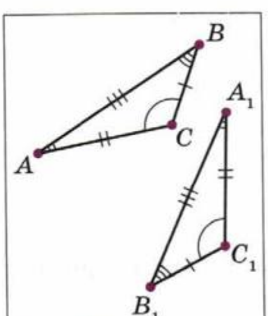


Рис. 2

Можно получить равенство и других соответствующих элементов этих треугольников. Например, из равенств (1) следует равенство соответствующих высот $AH = A_1H_1$ треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Вопрос. Как доказать, что если отрезки AB и CD пересекают друг друга в середине каждого из них, то $AC = BD$?

1.2. Второй признак. Для доказательства равенства треугольников иногда применяют другое утверждение.

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Это утверждение называется *вторым признаком равенства треугольников*.

Вопрос. Как доказать, что в четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D равны, если диагональ AC является биссектрисой углов A и C?

1.3. Доказательство второго признака. Докажем второй признак равенства треугольников.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны AC и A_1C_1, $\angle BAC$ и $\angle B_1A_1C_1$, $\angle BCA$ и $\angle B_1C_1A_1$ (рис. 3).

Отложим на луче AB отрезок AB_2, равный отрезку A_1B_1, как на рис. 4. Для треугольников AB_2C и $A_1B_1C_1$ выполняются условия первого признака равенства:

$$AC = A_1C_1,\ AB_2 = A_1B_1 \text{ и } \angle B_2AC = \angle BAC = \angle B_1A_1C_1.$$

Поэтому $\Delta AB_2C = \Delta A_1B_1C_1$, значит, $\angle B_1C_1A_1 = \angle B_2CA$. Но тогда из условия $\angle BCA = \angle B_1A_1C_1$ получаем, что от луча CA в одной полуплоскости отложены два равных угла BCA и B_2CA. Отсюда следует, что лучи CB и CB_2 (рис. 5) совпадают, а значит, точки B и B_2 совпадают. Поэтому треугольники ABC и AB_2C тоже совпадают.

Получаем, что треугольники $A_1B_1C_1$ и AB_2C равны по построению, а треугольники ABC и AB_2C равны как совпадающие. Следовательно, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$.

Таким образом, второй признак равенства треугольников доказан.

Вопрос. Какие свойства равенства геометрических фигур вы знаете?

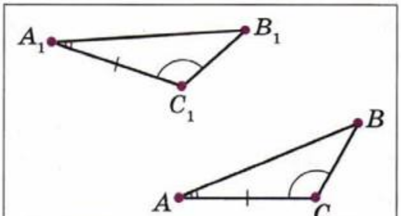


Рис. 3

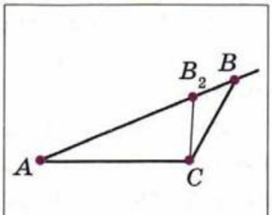


Рис. 4

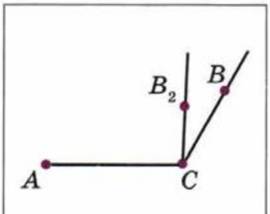


Рис. 5

1.4. Случай прямоугольных треугольников. Из второго признака равенства треугольников следует такой признак равенства прямоугольных треугольников.

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Вопрос. Как доказать этот признак равенства прямоугольных треугольников?

1.5. Равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. Воспользуемся свойствами углов прямоугольного треугольника для получения ещё одного признака равенства прямоугольных треугольников.

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника равны соответственно гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках MNK и $M_1N_1K_1$ углы NMK и $N_1M_1K_1$ — прямые и соответственно равны гипотенузы NK и N_1K_1, равные острые углы MNK и $M_1N_1K_1$ (рис. 6).

По свойству острых углов прямоугольного треугольника имеем равенство $\angle MNK + \angle MKN = 90°$, откуда $\angle MKN = 90° - \angle MNK$. Аналогично получаем равенство $\angle M_1K_1N_1 = 90° - \angle M_1N_1K_1$.

Так как $\angle MNK = \angle M_1N_1K_1$, то $\angle MKN = \angle M_1K_1N_1$. Следовательно, гипотенуза и прилежащие к ней углы треугольника MNK равны гипотенузе и прилежащим к ней углам треугольника $M_1N_1K_1$.

По второму признаку равенства

$$\Delta MNK = \Delta M_1N_1K_1.$$

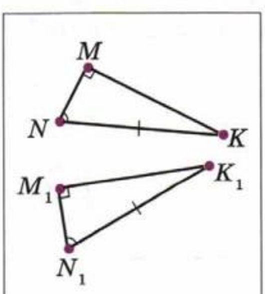


Рис. 6

Вопрос. Как доказать, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведённые к боковым сторонам, равны?

1.6. Третий признак. Для доказательства равенства треугольников применяют ещё одно утверждение.

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Это утверждение называется *третьим признаком равенства треугольников.*

Вопрос. Верно ли, что если у четырёхугольника $ABCD$ равны стороны AB и AD и равны стороны BC и CD, то диагональ AC — биссектриса углов A и C?

1.7.* Доказательство третьего признака. Докажем третий признак равенства треугольников.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 7) равны AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

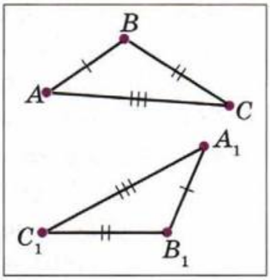


Рис. 7

Рассмотрим полуплоскость β (рис. 8) с границей AC и не содержащую вершину B. В полуплоскости β из вершины A проведём луч AM так, что $\angle MAC = \angle B_1A_1C_1$. На луче AM отложим отрезок AB_2, равный отрезку A_1B_1.

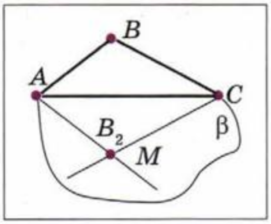


Рис. 8

Точку B_2 соединим отрезком с точкой C. По первому признаку равенства $\Delta AB_2C = \Delta A_1B_1C_1$. Следовательно, $B_2C = B_1C_1$.

Точки B и B_2 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Поэтому отрезок BB_2 пересекает прямую AC. В зависимости от того, где расположится точка пересечения отрезка BB_2 с прямой AC относительно точек A и C, будем иметь один из рисунков — 9, 10, 11, 12 или 13.

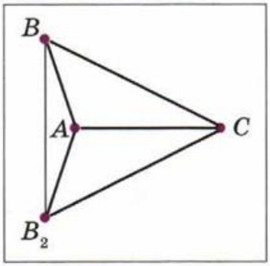


Рис. 9

Пусть, например, получается так, как на рис. 13. Тогда $AB = A_1B_1 = AB_2$ и $CB = C_1B_1 = CB_2$. Рассмотрим на рис. 13 треугольники ABB_2 и CBB_2. Эти треугольники равнобедренные, а поэтому $\angle ABB_2 = \angle AB_2B$ и $\angle CBB_2 = \angle CB_2B$. Следовательно, $\angle ABC = \angle ABB_2 - \angle CBB_2 = \angle AB_2B - \angle CB_2B = \angle AB_2C$.

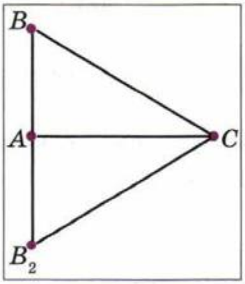


Рис. 10

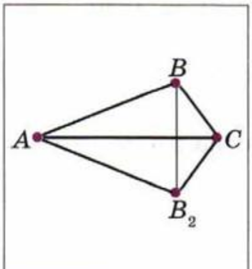


Рис. 11

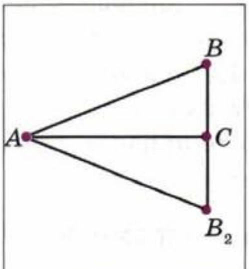


Рис. 12

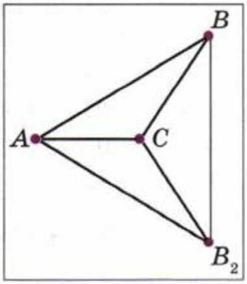


Рис. 13

По первому признаку равенства треугольников получаем $\Delta ABC = \Delta AB_2C$, а значит, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Аналогично рассматриваются другие возможные варианты (рис. 9–12).

Вопрос. Как провести доказательство в случае рис. 11?

1.8. Равенство прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе. Воспользуемся теоремой Пифагора для получения ещё одного признака равенства прямоугольных треугольников.

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны соответственно гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в прямоугольных треугольниках MNK и $M_1N_1K_1$ равны гипотенузы NK и N_1K_1 и катеты MN и M_1N_1 (рис. 14).

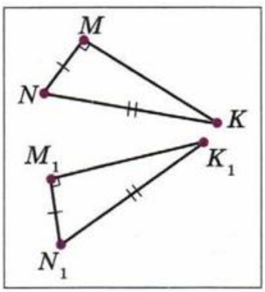


Рис. 14

Из теоремы Пифагора для треугольника MNK получаем $MK = \sqrt{NK^2 - MN^2}$, а для треугольника $M_1N_1K_1$ получаем $M_1K_1 = \sqrt{N_1K_1^2 - M_1N_1^2}$. Так как $N_1K_1 = NK$ и $M_1N_1 = MN$, то отсюда следует равенство $MK = M_1K_1$.

Приходим к тому, что в треугольниках MNK и $M_1N_1K_1$ равны соответственно все стороны. По третьему признаку равенства $\Delta M_1N_1K_1 = \Delta MNK$.

Вопрос. Как построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету?

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.

2. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.

3. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.

4. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу.

5. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

6. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

Задачи и упражнения

1. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании треугольника равны.

2. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, равны.

3. Докажите, что если высота и медиана, проведённые из одной вершины треугольника, совпадают, то треугольник равнобедренный.

4. Докажите, что если высота и биссектриса, проведённые из одной вершины треугольника, совпадают, то треугольник равнобедренный.

5. Известно, что $\angle PRQ = \angle SPR$ и $\angle QPR = \angle PRS$ (рис. 15). Докажите, что $\angle PQR = \angle PSR$.

6. Известно, что $AK = KD$, $BK = KC$ (рис. 16). Докажите, что $AC = BD$.

7. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в двух различных точках A и B. Докажите, что треугольники O_1AO_2 и O_1BO_2 равны.

8. Постройте прямоугольник по одной из сторон и диагонали.

9. Постройте ромб по стороне и одному заданному углу.

10.* Постройте квадрат площадью в 32 см^2.

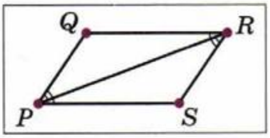


Рис. 15

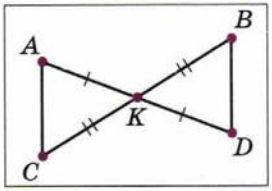


Рис. 16

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какой из углов на рис. 17 равен углу ABC?

1) $\angle LFN$; 2) $\angle LFM$; 3) $\angle KFN$; 4) $\angle KFM$.

1.2. Какой из углов на рис. 18 равен $\angle BCA$?

1) $\angle FEN$; 2) $\angle LEF$; 3) $\angle FEK$; 4) $\angle EFL$.

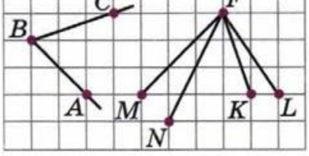


Рис. 17

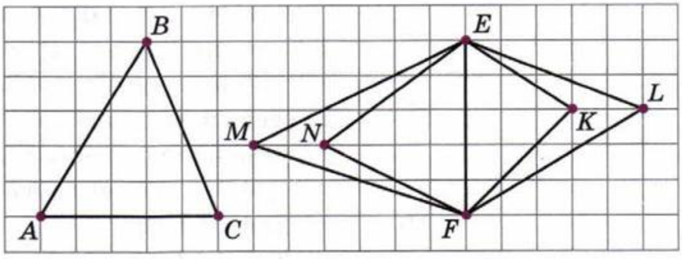


Рис. 18

1.3. В двух равных треугольниках ABC и MNK равны между собой стороны AB и NK, BC и MK. Какое соответствие между вершинами треугольников определяет это равенство?

1) $A \to K,\ B \to N,\ C \to M$; 2) $B \to K,\ A \to N,\ C \to N$;
3) $A \to N,\ B \to K,\ C \to M$; 4) $A \to N,\ B \to M,\ C \to N$.

1.4. Через точку K биссектрисы угла с вершиной A перпендикулярно биссектрисе проводится прямая, которая пересекает стороны в точках B и C (рис. 19). Какой из признаков позволяет доказать, что $BK = KC$?

1) третий признак равенства треугольников;
2) признак равенства по двум катетам;
3) признак равенства по гипотенузе и катету;
4) признак равенства по катету и острому углу.

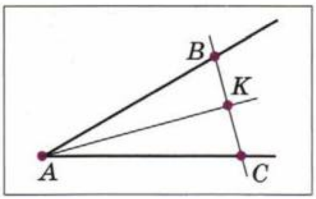


Рис. 19

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. На сторонах угла с вершиной A и величиной $40°$ отмечены равные отрезки AB и AC. Из точек B и C проведены лучи, пересекающиеся в точке K так, что $\angle ACK = \angle ABK = 22°$ (рис. 20). Какие из равенств верны?

1) $\angle BCA = \angle CBA$; 2) $\angle BCK = \angle CBK$;
3) $\angle KCA = \angle KBA$; 4) $\angle CKB = \angle KCB$.

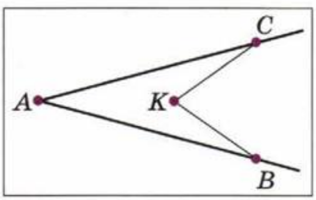


Рис. 20

2.2. В четырёхугольнике $ABCD$, который не является ромбом, диагональ AC является биссектрисой углов с вершинами A и C (рис. 21). Какие из равенств верны?

1) $\angle ABC = \angle ADC$; 2) $AB = BC$;
3) $BA = CD$; 4) $CD = BC$.

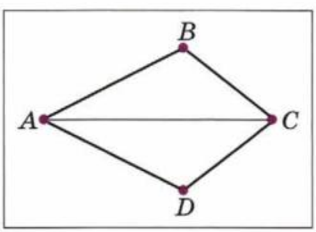


Рис. 21

2.3. На плоскости выбраны четыре различные точки A, B, C, D так, что отрезки AB, AC и AD равны, $\angle BAC = \angle BAD$ и отмечена точка K пересечения прямых AB и CD (рис. 22). Какие из утверждений неверны?

1) AK — биссектриса угла CAD;
2) $AB \perp CD$;
3) $CK = KD$;
4) $AK = AB$.

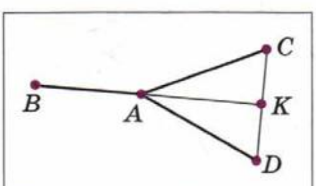


Рис. 22

2.4. Какие из следующих утверждений верны?

1) если $AB = MN$, $AC = MK$ и $\angle BAC = \angle NMK$, то $\Delta ABC = \Delta MNK$;

2) если $AB = MN$, $\angle BAC = \angle NMK$, $\angle CAB = \angle MNK$, то $\Delta ABC = \Delta MNK$;

3) если $AB = MN$, $BC = NK$, $AC = MK$, то $\Delta ABC = \Delta MNK$;

4) если $\Delta ABC = \Delta MNK$, то $AB = MN$.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

2.1. Построение треугольника по трём сторонам. Построим треугольник по трём сторонам, равным отрезкам A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (рис. 1).

Для существования треугольника с указанными сторонами необходимо одновременное выполнение неравенств: $A_1B_1 + A_2B_2 > A_3B_3$, $A_1B_1 + A_3B_3 > A_2B_2$, $A_2B_2 + A_3B_3 > A_1B_1$.

Пусть среди отрезков A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 отрезок A_1B_1 — максимальный. Тогда первые два неравенства выполнены.

На произвольной прямой отложим отрезок PQ, равный отрезку A_1B_1 (рис. 2). Затем проведём окружность радиуса A_2B_2 и с центром в точке P (рис. 3), а также окружность радиуса A_3B_3 с центром в точке Q (рис. 4). По предположению $A_2B_2 + A_3B_3 > A_1B_1$, поэтому окружности пересекутся в двух точках R и R_1.

Треугольник PQR — искомый, так как $PQ = A_1B_1$; $PR = A_2B_2$; $QR = A_3B_3$, то есть три его стороны равны соответственно заданным отрезкам A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3.

Заметим, что и треугольник PQR_1 также является искомым, однако этот треугольник равен треугольнику PQR в силу третьего признака равенства треугольников.

Вопрос. Как построить ромб по стороне и одной из диагоналей?

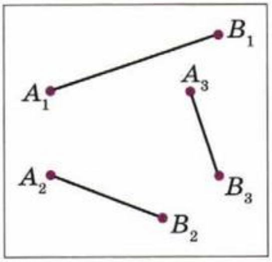


Рис. 1

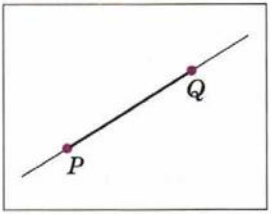


Рис. 2

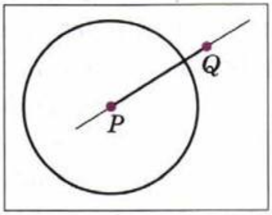


Рис. 3

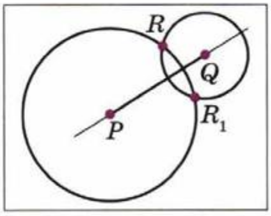


Рис. 4

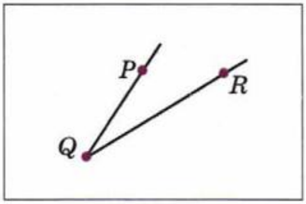


Рис. 5

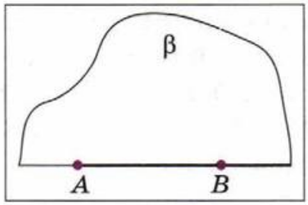


Рис. 6

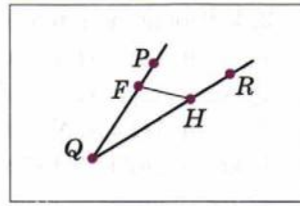


Рис. 7

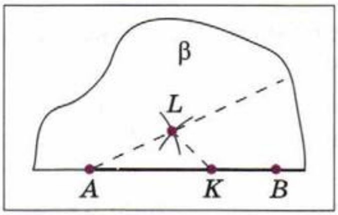


Рис. 8

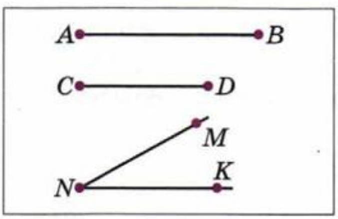


Рис. 9

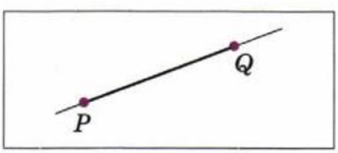


Рис. 10

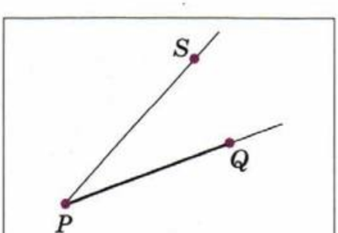


Рис. 11

2.2. Построение угла, равного данному. Построим угол, равный заданному острому углу PQR (рис. 5) и такой, что одна из его сторон совпадает с данным лучом AB, а вторая лежит в полуплоскости β, границей которой является прямая AB (рис. 6).

Выберем на сторонах PQ и QR заданного острого угла произвольные точки F и H (рис. 7). На луче AB отложим отрезок AK, равный QH, а затем в полуплоскости β проведём две полуокружности: радиуса QF с центром в точке A и радиуса HF с центром в точке K (рис. 8). Пусть L – точка пересечения этих полуокружностей. Тогда угол LAK — искомый.

По построению имеем: $AK = QH$, $AL = QF$, $KL = HF$. Значит, $\Delta AKL = \Delta QHF$, поэтому $\angle LAK = \angle FQH = \angle PQR$.

Вопрос. Как построить угол, в два раза больший заданного угла?

2.3. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними. Пусть заданы отрезки AB и CD и угол MNK (рис. 9).

На произвольной прямой отложим отрезок PQ, равный отрезку AB (рис. 10). В одной из полуплоскостей построим угол SPQ, равный углу MNK (рис. 11). На луче PS построим отрезок PR, равный отрезку CD (рис. 12).

Треугольник PQR удовлетворяет поставленным условиям.

Вопрос. Сколько решений имеет данная задача?

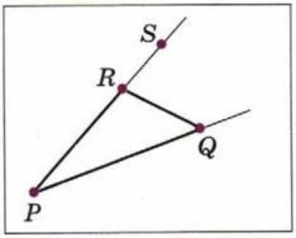


Рис. 12

2.4. Построение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам. Пусть заданы отрезок AB и углы MNK, $M_1N_1K_1$ (рис. 13).

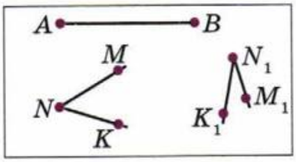


Рис. 13

На произвольной прямой отложим отрезок PQ, равный отрезку AB (рис. 14). В одной из полуплоскостей построим угол SPQ, равный углу MNK (рис. 15). В этой же полуплоскости построим угол S_1QP, равный углу $M_1N_1K_1$.

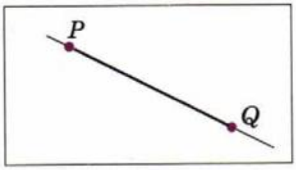


Рис. 14

Лучи PS и QS_1 пересекаются в выделенной полуплоскости в точке R (рис. 16).

Треугольник PQR — искомый.

Вопрос. Что произойдёт, если вы попытаетесь строить треугольник с двумя тупыми углами?

2.5. Пример неединственности решения. Приведём пример задачи о построении треугольника, которая может иметь два решения.

Построим треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из сторон.

Пусть заданы два отрезка A_1B_1, A_2B_2 и угол MNK, который должен лежать в треугольнике против стороны, равной отрезку A_2B_2 (рис. 17).

На произвольной прямой отложим отрезок PQ, равный отрезку A_1B_1 (рис.18).

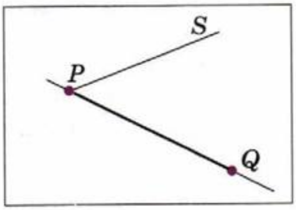


Рис. 15

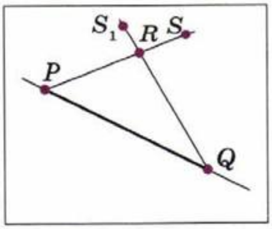


Рис. 16

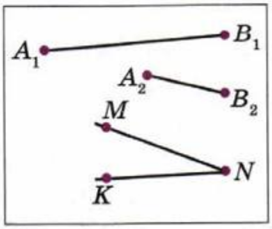


Рис. 17

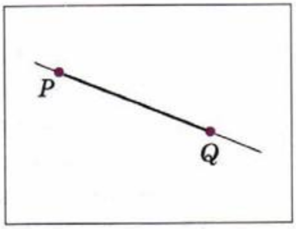


Рис. 18

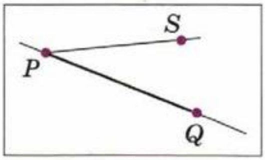


Рис. 19

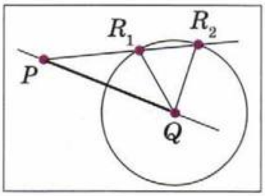


Рис. 20

В одной из полуплоскостей построим угол SPQ, равный углу MNK (рис. 19).

Проведём окружность с центром в точке Q радиуса A_2B_2. Эта окружность пересекает луч PS в двух точках — R_1 и R_2 (рис. 20).

Треугольники PQR_1 и PQR_2 оба удовлетворяют требуемым условиям. Треугольник PQR_1 расположен внутри треугольника PQR_2, а поэтому в поставленной задаче возможны два различных решения.

Вопрос. При каких условиях поставленная задача будет иметь единственное решение?

Контрольные вопросы и задания

1. Как построить треугольник по трём сторонам?

2.** При каких условиях можно построить треугольник по трём сторонам?

3. Как от заданного луча отложить угол, равный заданному углу?

4. Как построить треугольник по стороне и прилежащим к ней углам?

Задачи и упражнения

1. Постройте угол, равный сумме двух данных углов.

2. Постройте угол, равный разности двух данных углов.

3.* Через вершину острого угла проведите две прямые, каждая из которых образует равные углы со сторонами данного угла.

4. Постройте равнобедренный треугольник: а) по основанию и боковой стороне; б)* по основанию и углу при вершине.

5. Постройте равносторонний треугольник: а) по стороне; б)* по высоте.

6.* Постройте правильный шестиугольник по стороне.

7. Постройте равнобедренный треугольник:

а) по углу при вершине и боковой стороне;

б)* по углу при основании и боковой стороне;

в) по основанию и высоте, проведённой к основанию;

г) по боковой стороне и высоте, проведённой к основанию;

д)* по боковой стороне и высоте, проведённой к этой стороне.

8.** Даны отрезок длины a, угол с вершиной A и точка B на одной из сторон угла. Постройте точку C на другой стороне угла такую, что $|CA| + |CB| = a$.

9. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.

10. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу.

11. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

12. Постройте треугольник ABC, если заданы отрезки, равные его сторонам AB, BC и медиане, проведённой к стороне AB.

13.** Постройте треугольник ABC по стороне AB, прилежащему к этой стороне углу BAC и разности сторон AC и BC, зная, что $AC > BC$.

14.** Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета с гипотенузой.

15.** Докажите следующий признак равенства треугольников: если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AC и A_1C_1, стороны BC и B_1C_1 и тупые углы ABC и $A_1B_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

16.** Постройте треугольник ABC, зная угол BAC, отрезки AC и $d = BC - AC$, предполагая, что $BC > AC$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Сколько можно построить не совпадающих друг с другом треугольников, равных заданному треугольнику со сторонами 10 см, 8 см, 7 см, у которых одна из сторон совпадает с заданным на плоскости отрезком AB длиной 8 см?

1) один; 2) два; 3) три; 4) четыре.

1.2. Сколько можно построить не равных равнобедренных треугольников, у которых длины двух сторон равны 4 см и 4 см?

1) ни одного; 2) один; 3) два; 4) больше двух.

1.3. В прямоугольном треугольнике наименьший угол в 6 раз меньше суммы двух других углов. Чему равен наименьший угол этого треугольника?

1) 18°; 2) 25°; 3) 30°; 4) 45°.

1.4. Чему равна длина общей хорды двух равных окружностей с радиусом 50 см, расстояние между центрами которых равно 60 см?

1) 20 см; 2) 40 см; 3) 60 см; 4) 80 см.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В каких из указанных случаев можно построить треугольник с длинами сторон c, d, e?

1) $c = 5$ см, $d = 8$ см, $e = 13$ см; 2) $c = 5$ см, $d = 8$ см, $e = 14$ см;
3) $c = 6$ см, $d = 8$ см, $e = 13$ см; 4) $c = 8$ см, $d = 6$ см, $e = 14$ см.

2.2. Из точки O проведены 6 лучей таким образом, что углы, образуемые любыми двумя соседними лучами, равны. Какие углы можно найти на получившемся чертеже?

1) $30°$; 2) $60°$; 3) $120°$; 4) $150°$.

2.3. На плоскости построили три окружности с общим центром O и радиусами 3 см, 5 см и 8 см. Через точку O провели прямую. Расстояния между точками её пересечения с окружностями могут быть следующими:

1) 1 см; 2) 2 см; 3) 5 см; 4) 8 см.

2.4.** Два квадрата имеют общую точку пересечения диагоналей. При каких значениях сторон контуры этих квадратов не могут пересекаться?

1) 5 см и 7 см; 2) 10 см и 15 см; 3) 15 см и 23 см; 4) 20 см и 27 см.

§ 3. ПРИМЕРЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

3.1. Доказательство равенства треугольников по двум соответствующим сторонам и медиане. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены медианы CM и C_1M_1 и известно, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $CM = C_1M_1$. Докажем, что тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 1).

Доказательство. Так как точка M — середина AB, то $BM = \frac{1}{2}AB$. Точно так же $B_1M_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$. Поэтому в треугольниках BMC и $B_1M_1C_1$ имеем: $BC = B_1C_1$, $CM = C_1M_1$, $BM = B_1M_1$. По третьему признаку равенства треугольников получаем, что $\Delta CBM = \Delta C_1B_1M_1$. Отсюда следует, что $\angle CBM = \angle C_1B_1M_1$.

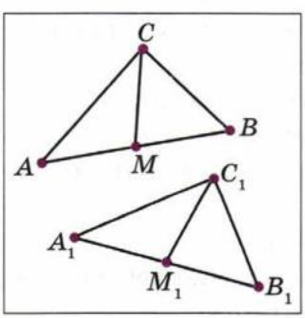


Рис. 1

Рассмотрим теперь треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Имеем: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Следовательно, по первому признаку $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Вопрос. Как доказать, что $\Delta ACM = \Delta A_1C_1M_1$?

3.2.* **Задача о трёх отрезках, имеющих общую середину.** На рис. 2 отрезки AB, CD и EF пересекаются в одной точке O и каждый из них делится точкой O пополам. Докажем, что треугольники ACE и BDF равны.

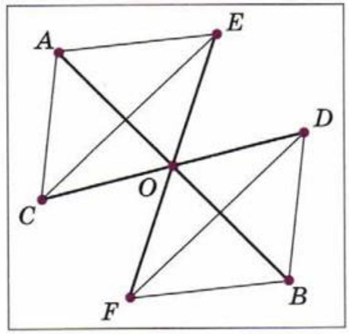


Рис. 2

Доказательство. Рассмотрим на рис. 2 треугольники ACO и BDO. У этих треугольников $AO = OB$, $CO = OD$ по условию, а углы AOC и BOD равны как вертикальные. По первому признаку равенства $\Delta AOC = \Delta BOD$.

Из равенства треугольников следует равенство соответственных сторон AC и BD.

Аналогично можно рассмотреть треугольники AOE и BOF и получить, что $AE = BF$, а затем рассмотреть треугольники COE и DOF и получить, что $CE = DF$.

В итоге получаем равенства $AC = BD$, $AE = BF$, $CE = DF$, откуда, по третьему признаку, треугольники ACE и BDF равны.

Вопрос. Как будет выглядеть чертёж в данной задаче, если точка A попадёт на отрезок CE?

3.3.** **Использование признаков равенства треугольника для решения задач.** Рассмотрим два равносторонних треугольника ABC и CDE, расположенных так, как на рис. 3, где точки A, C, E принадлежат одной прямой, а точки M и N — середины отрезков AD и BE.

Докажем, что ΔCMN всегда равносторонний.

Доказательство. Обратим внимание на треугольники ACD и BCE, изображённые на рис. 4 и 5.

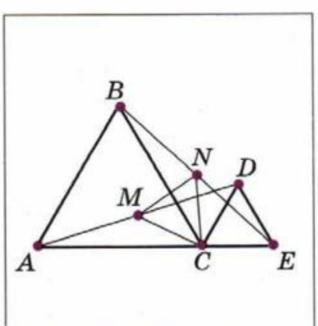


Рис. 3

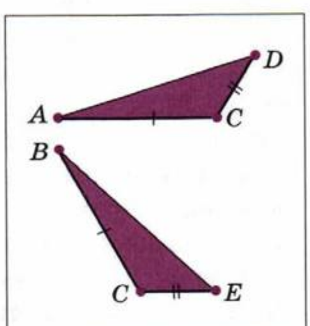


Рис. 4

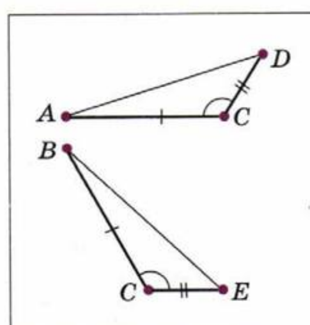


Рис. 5

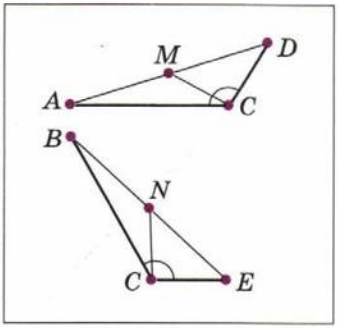


Рис. 6

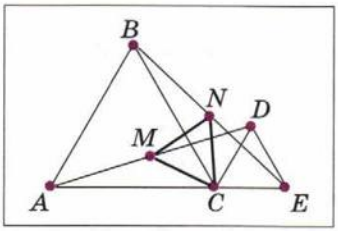


Рис. 7

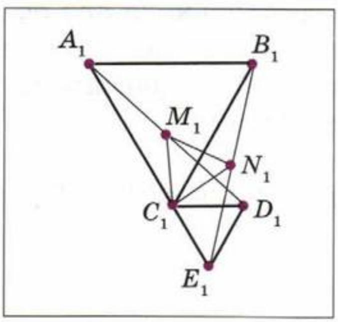


Рис. 8

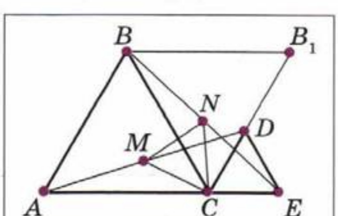


Рис. 9

По условию имеем

$$AC = BC,\ CD = CE.$$

Далее:

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle DCE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

По первому признаку равенства треугольники ACD и BCE равны (рис. 5).

Так как в равных треугольниках равны все соответствующие элементы, то в треугольниках ACD и BCE равны медианы CM и CN и углы MCA и NCB (рис. 6).

Вычислим угол MCN следующим образом (рис. 7):

$$\angle MCN = (\angle ACB + \angle BCN) - \angle ACM = \\ = \angle ACB = 60^\circ.$$

Получаем, что в треугольнике MCN две стороны равны, а угол между ними — 60°. Отсюда следует, что треугольник MCN — равносторонний.

Вопрос. Допустим, что на рис. 7 поставили точку P в середине отрезка AM и точку Q в середине отрезка BN. Как доказать, что треугольник PQC — равносторонний?

3.4. Использование поворота плоскости для решения задач.** Покажем ещё один возможный способ решения задачи из предыдущего пункта.

Рассмотрим поворот чертежа вокруг точки C на 60° по часовой стрелке, и пусть при этом точки A, B, C, D, E, M, N переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, M_1, N_1.

При повороте равные элементы переходят в равные. Поэтому точка M_1 является серединой отрезка A_1D_1 (рис. 8).

На рис. 9 показано, как повёрнутый чертёж связан с основным. Ясно, что точка A_1 совпадает с точкой B, точка D_1 — с точкой E. Поэтому точка M_1 совпадает с точкой N. Но это значит, что при указанном повороте точка M перешла в точку N. Отсюда получаем, что $\angle MCN = 60°$ и $MC = NC$. Приходим к тому же результату, что и при разборе решения в предыдущем пункте.

Отметим, что оба решения основаны на равенстве треугольников ACD и BCE.

Вопрос. Как построить равносторонний треугольник, одна вершина которого совпадает с заданной точкой, а две оставшиеся вершины лежат на двух заданных прямых?

Задачи и упражнения

1. На рис. 10 изображены два треугольника — ABD и ACD, причём известно, что $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle CAD = \angle BDA$. Докажите, что:

а) $\Delta ABD = \Delta ACD$;

б) $\Delta ABO = \Delta COD$;

в)* AOD — равнобедренный.

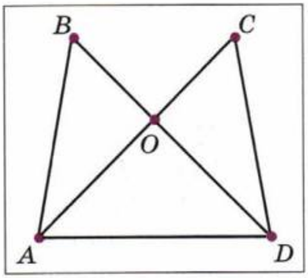


Рис. 10

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, причём $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Отрезок CL — биссектриса в треугольнике ABC, отрезок C_1L_1 — биссектриса в треугольнике $A_1B_1C_1$. Докажите, что $CL = C_1L_1$.

3. На рис. 11 изображены два равных треугольника ABC и ACD, причём стороны AB и CD не равны. Докажите, что $AC \perp BD$.

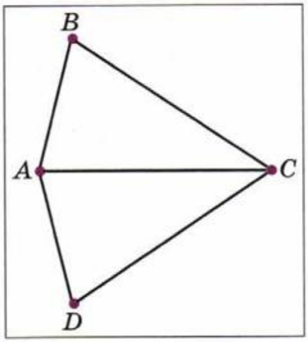


Рис. 11

4.* Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

5.** Докажите, что середины сторон правильного шестиугольника являются вершинами другого правильного шестиугольника.

6. На высоте BH равнобедренного треугольника с основанием AC выбрана произвольная точка D. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta CBD$.

7. На рис. 12 изображены равные треугольники ABC и AKL, причём $AB = AK$, $AC = AL$, $BC = KL$. Докажите, что равны треугольники:

а) ABL и ACK; б) BCK и BLK; в) BCL и KCL.

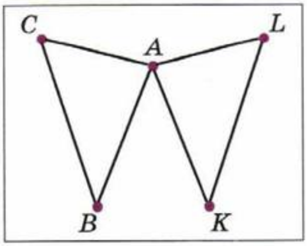


Рис. 12

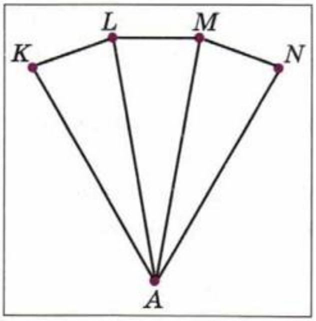


Рис. 13

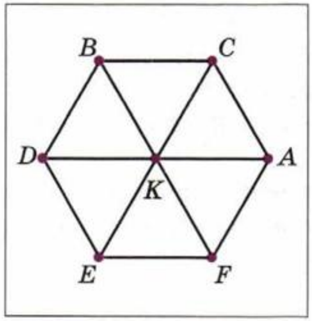


Рис. 14

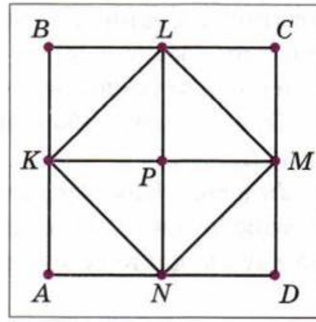


Рис. 15

8.* На рис. 13 изображены три равных равнобедренных треугольника — AKL, ALM, AMN, причём $KL = LM = MN$. Докажите, что треугольники KMN и KLN равны.

9. На рис. 14 изображены шесть равных равносторонних треугольников. Найдите все треугольники, равные:

а) треугольнику ACD; б) треугольнику BCD.

10. На рис. 15 изображены восемь равных равнобедренных прямоугольных треугольников. Найдите все треугольники, равные:

а) треугольнику ALM; б) треугольнику ACM.

11.** На сторонах AC и BC треугольника ABC выбрали соответственно различные точки M и N. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если известно, что $\Delta ANB = \Delta AMB$ и при этом соответственными сторонами в этих треугольниках являются:

а) AB и AM, BN и AB, AN и BM; б) AB и AB, AN и BM, BN и AM.

Тесты

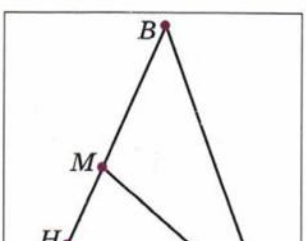


Рис. 16

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В треугольнике ABC проведена медиана CM, на отрезке AM взята точка H так, что $AH : HM = 3 : 4$ (рис. 16). Чему равно отношение $HM : HB$?

1) 7 : 14; 2) 8 : 22; 3) 14 : 28; 4) 20 : 36.

1.2. В окружность с центром O вписан правильный n-угольник, одна из сторон которого — отрезок CD, и $\angle COD = 30°$. Чему равно значение n?

1) 10; 2) 11; 3) 12; 4) 13.

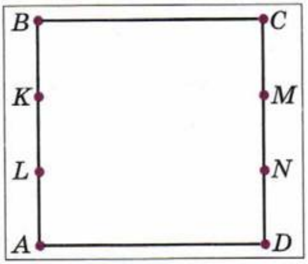


Рис. 17

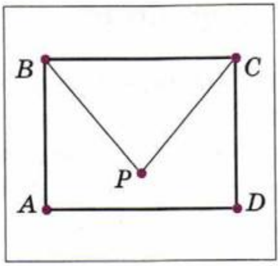


Рис. 18

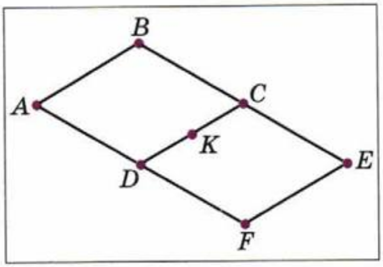


Рис. 19

1.3. В квадрате $ABCD$ точки K, L, M и N взяты так, что $BK = KL = LA$, $CM = MN = ND$ (рис. 17). Какой из следующих треугольников равен ΔAMN?

1) AND; 2) ADL; 3) DKL; 4) ACM.

1.4. В прямоугольнике $ABCD$ на рис. 18 угол BPC равен 80°, угол PCB равен 50°. Чему равен угол ABP?

1) 20°; 2) 30°; 3) 40°; 4) 50°.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В квадрате $ABCD$ точки K, L, M и N взяты так, что $BK = KL = LA$, $CM = MN = ND$ (рис. 17). Какие из равенств верны?

1) $\Delta AND = \Delta LNM$; 2) $\Delta KND = \Delta LMC$;
3) $\Delta LMC = \Delta BMN$; 4) $\Delta KND = \Delta ACM$.

2.2. На рис. 19 изображены два равных ромба $ABCD$ и $CDEF$. Точка K делит DC пополам. Какие из равенств правильны?

1) $\Delta CKE = \Delta BKC$; 2) $\Delta CKE = \Delta AKD$;
3) $\Delta DKF = \Delta BKC$; 4) $\Delta ABK = \Delta EKF$.

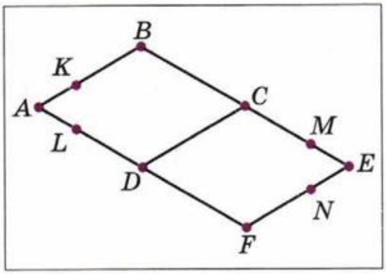


Рис. 20

2.3. На рис. 20 изображены два равных ромба $ABCD$ и $CDEF$. Точки K, L, M, N выбраны так, что $AL = AK = EM = EN$. Какие из равенств являются верными?

1) $\Delta DNF = \Delta KBC$; 2) $\Delta KAD = \Delta NFD$;
3) $\Delta AKL = \Delta EMN$; 4) $\Delta ANF = \Delta KBN$.

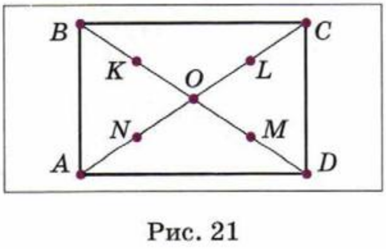


Рис. 21

2.4. В прямоугольнике $ABCD$ на рис. 21 точки K, L, N, O, M делят диагонали на равные части. Какие из равенств являются верными?

1) $\Delta KNO = \Delta NOM$; 2) $\Delta DLC = \Delta BAN$;
3) $\Delta CKO = \Delta AOM$; 4) $\Delta ALM = \Delta BML$.

§ 4. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

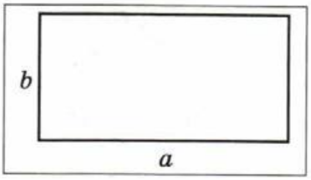


Рис. 1

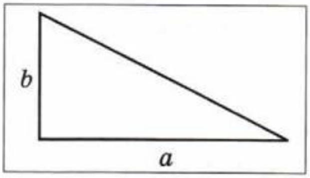


Рис. 2

4.1. Площадь прямоугольного треугольника. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = ab$, где a и b — длины сторон прямоугольника, выраженные в одних единицах измерения длин.

На основе этой формулы была получена формула для вычисления площади прямоугольного треугольника (рис. 1 и 2): **$S = \frac{1}{2} \cdot ab$, где a и b — длины катетов.**

С помощью приведённых формул можно вычислять площади многих фигур, например, на клетчатой бумаге.

Вопрос. Чему равна площадь четырёхугольника $ABCD$ на рис. 3, выраженная через площадь квадрата клетчатой бумаги?

4.2. Свойства площади. Напомним основные свойства площади.

1) Если одна фигура содержит вторую фигуру, то площадь второй фигуры не больше площади первой фигуры.

Например, на рис. 4 равносторонний треугольник имеет меньшую площадь, чем квадрат с такой же стороной.

2) Если фигура составлена из двух неперекрывающихся частей, то площадь всей фигуры равна сумме площадей частей.

Например, на рис. 5 площадь «буквы Т» можно найти как сумму площадей двух прямоугольников.

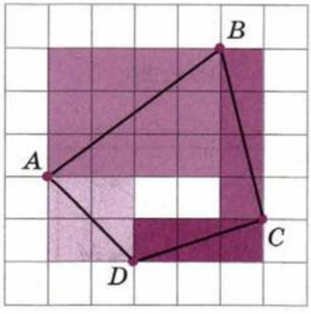


Рис. 3

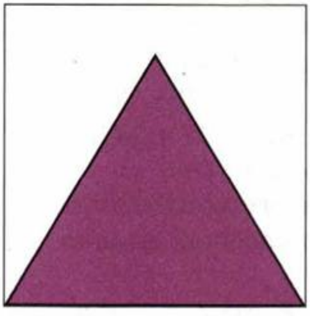


Рис. 4

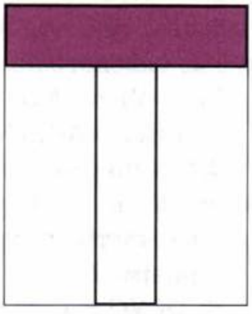


Рис. 5

3) Площади равных фигур равны.

Например, на рис. 6 два полукруга имеют равные площади.

4) Площадь любого квадрата со стороной, равной выбранной единице измерения длин, равна соответствующей единице измерения площади.

Вопрос. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат с вершинами в узлах клетчатой бумаги?

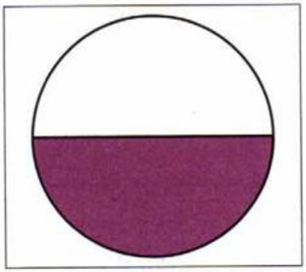


Рис. 6

4.3. Основание треугольника. На рисунке треугольник часто изображают так, что одна из сторон треугольника горизонтальна. В таком случае иногда говорят, что горизонтально расположенная сторона — это *основание* треугольника.

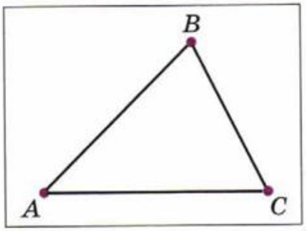


Рис. 7

Например, можно сказать, что на рис. 7 изображён треугольник ABC с основанием AC.

Важно понять, что слова «основание треугольника» используются только для удобства зрительного восприятия. Любой треугольник можно переместить так, чтобы нужная его сторона на рисунке выглядела основанием.

Вопрос. В каком случае высота треугольника, проведённая из вершины, противоположной основанию, не пересекается с основанием?

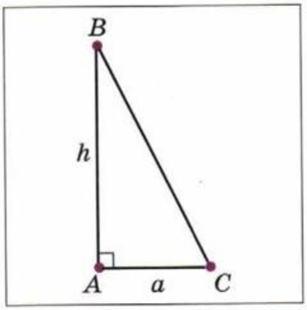


Рис. 8

4.4. Площадь произвольного треугольника. Воспользуемся формулой площади прямоугольного треугольника для получения формулы площади произвольного треугольника.

К основанию AC треугольника ABC проведём высоту. Обозначим длину основания AC буквой a, длину высоты буквой h. Возможны три случая чертежа.

Первый случай. Основание высоты, проведённой из вершины B, совпадает с вершиной треугольника ABC, как на рис. 8. Тогда треугольник ABC прямоугольный и его катеты $AB = h$, $AC = a$.

По формуле площади прямоугольного треугольника получаем

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot ah.$$

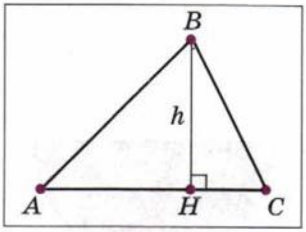


Рис. 9

Второй случай. Основание высоты, проведённой из вершины B, лежит на стороне AC треугольника ABC, как на рис. 9. В таком случае площадь треугольника ABC равна сумме площадей прямоугольных треугольников ABH и BHC. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABH} + S_{\Delta HBC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot h + \frac{1}{2} \cdot HC \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (AH + HC) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot ah.$$

Таким образом,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot ah.$$

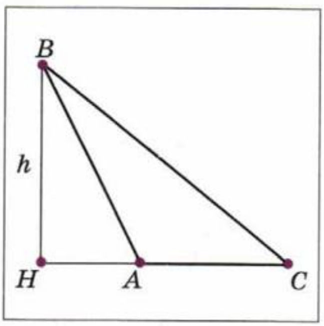


Рис. 10

Третий случай. Основание высоты, проведённой из вершины B, лежит на продолжении стороны AC треугольника ABC, как на рис. 10. В таком случае можно записать равенство

$$S_{\Delta HBC} = S_{\Delta HBA} + S_{\Delta ABC}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta HBC} - S_{\Delta HBA} = \frac{1}{2} \cdot HC \cdot h - \frac{1}{2} \cdot HA \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (HC - HA) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot ah,$$

то есть,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot ah.$$

Во всех трёх возможных случаях приходим к единой формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot ah.$$

Таким образом:

Площадь произвольного треугольника равна половине произведения его основания и высоты, проведённой к основанию.

Вопрос. Как доказать, что равные треугольники имеют равные площади?

4.5. Простой пример. Пусть треугольник ABC состоит из двух прямоугольных треугольников ABK и BKC, причём $BK = 4$ см, $AK = 5$ см, $CK = 2$ см.

Принимаем в треугольнике ABC за основание сторону $AC = 5 + 2 = 7$ (см). Тогда высотой, проведённой к основанию, будет $BK = 4$ см. Следовательно, по формуле

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Вопрос. Каковы длины всех сторон треугольника ABC?

4.6. Ещё один пример. Найдём площадь равностороннего треугольника со стороной 2 см (рис. 11).

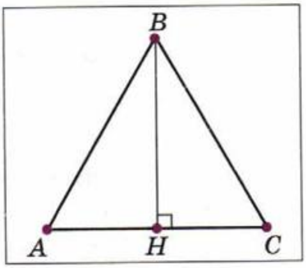


Рис. 11

Проведём высоту BH и найдём $AH = HC = 1$ см. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора получим равенство $AB^2 = AH^2 + BH^2$. Поскольку $AH = 1$ см, $AB = 2$ см, то $4 = 1 + BH^2$. Отсюда $BH^2 = 3$ и $BH = \sqrt{3}$ см. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Вопрос. Чему равна площадь равностороннего треугольника со стороной 1 км?

4.7. Площадь равностороннего треугольника. Найдём площадь равностороннего треугольника со стороной a.

Задача похожа на задачу из предыдущего пункта. Поэтому возьмем рис. 11 и внесём в приведённые выше рассуждения следующие изменения:

$$AH = HC = \frac{a}{2}; \quad AB^2 = AH^2 + BH^2;$$

значит,

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + BH^2; \quad BH^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Итак, $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Вопрос. По какой формуле можно вычислять площадь правильного шестиугольника со стороной a?

Контрольные вопросы и задания

1. По какой формуле можно вычислять площадь прямоугольного треугольника?

2. Перечислите основные свойства площади.

3. По какой формуле можно вычислять площадь произвольного треугольника?

4.* Какие фигуры называются равносоставленными?

5. По какой формуле можно вычислять площадь равностороннего треугольника?

6. Чему равно отношение площадей двух треугольников с равными высотами?

7. Чему равно отношение площадей двух треугольников с равными основаниями?

Задачи и упражнения

1. Найдите площадь ромба, если длины его диагоналей равны:

а) 3 см и 4 см; б) 5 см и 11 см; в) 1,25 дм и 0,39 дм.

2. На клетчатой бумаге найдите площадь фигуры, изображённой:

а) на рис. 12; б)** на рис. 13;

в) на рис. 14; г)** на рис. 15.

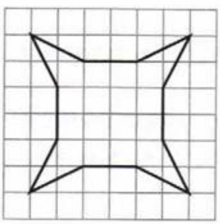


Рис. 12

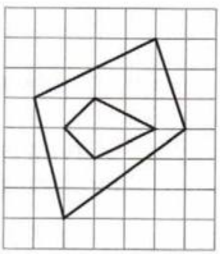


Рис. 13

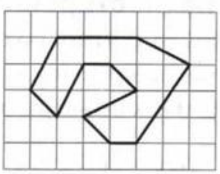


Рис. 14

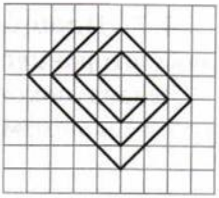


Рис. 15

3. Сколько краски потребуется, чтобы с двух сторон покрасить сплошную дверь шириной 82 см и высотой 2 м 3 см, если на покраску 1 м^2 уходит 80 г краски?

4.* На рис. 16 изображён прямоугольник. Найдите длины сторон прямоугольника в шагах сетки и вычислите по формуле его площадь.

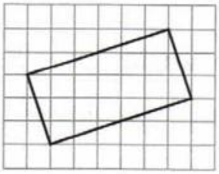


Рис. 16

5.** Допустим, что в качестве единицы измерения площади выбрана площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом в 1 см.

Чему равна в таких единицах:

а) площадь квадрата со стороной 5 см;

б) площадь круга с радиусом 6 см?

6. Нарисуйте треугольник с основанием a и высотой h, проведённой к основанию, и найдите площадь треугольника, если:

а) $a = 3$ см, $h = 5$ см; б) $a = 12$ см, $h = 2$ см; в) $a = 4{,}9$ см, $h = 0{,}3$ см.

7.* а) Проверьте, что в прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 15$ см, $BC = 20$ см проведённая к гипотенузе высота равна 12 см.

б) Проверьте, что значение площади такого треугольника, вычисленное по общей формуле, не зависит от того, какую сторону считать основанием этого треугольника.

8.* а) Проверьте, что в треугольнике ABC со сторонами $AB = 13$ см, $BC = 15$ см, $AC = 14$ см проведённая к стороне AC высота равна 12 см.

б) Найдите длины высот этого треугольника, проведённых к сторонам AB и BC.

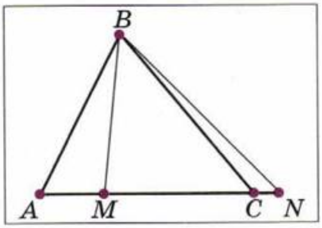


Рис. 17

9. В треугольнике ABC площади 72 см^2 проведена медиана BM. Найдите площадь треугольника ABM.

10. Площадь треугольника ABC равна 99 см^2, а точки M и N делят сторону AC на три равные части. Найдите площадь треугольника BMN.

11.* Площадь треугольника ABC равна 20 см^2, а точки M и N расположены на прямой AC так, как на рис. 17, причём $AM : MC = 3 : 7$, $AN : NC = 8 : 1$. Найдите площадь треугольника BMN.

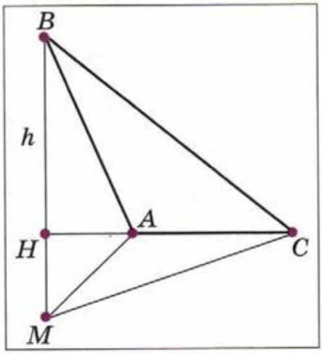


Рис. 18

12. Площадь треугольника ABC равна 22 м^2. Точка M расположена на высоте BH так, что $BM = \frac{1}{4} \cdot BH$. Найдите площадь треугольника AMC.

13.* На рис. 18 изображён треугольник ABC. На продолжении высоты BH выбрана точка M так, что $HM : BH = 4 : 9$. Найдите площадь треугольника AMC, зная, что площадь треугольника ABC равна 81 см^2.

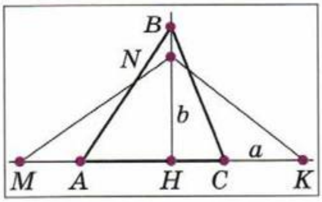


Рис. 19

14.* На рис. 19 проведены две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке H. Остальные точки расположены так, что $AH : MH = 3 : 5$, $NH : BH = 7 : 9$,

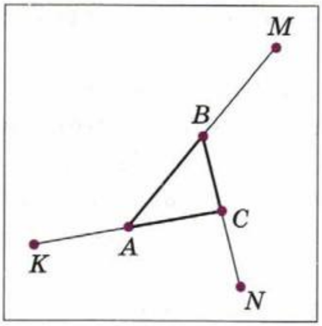


Рис. 20

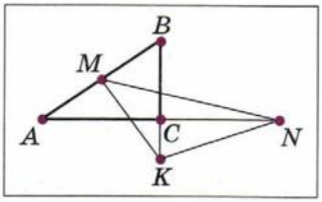


Рис. 21

$CH : KH = 2 : 5$, $MH : KH = 8 : 7$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника MNK.

15.** Площадь треугольника ABC, изображённого на рис. 20, равна 2 см^2. Точки M, N, K выбраны на продолжениях сторон так, что $AK = AC$, $BM = BA$, $CN = CB$. Найдите площадь треугольника MNK.

16.** Площадь треугольника ABC, изображённого на рис. 21, равна S. На прямых AB, AC и BC выбраны соответственно точки M, N, K так, что $AM = MB$, $AC = CN$, $KC = \frac{1}{2} \cdot BC$. Найдите площадь треугольника MNK.

17.** Придумайте свой вариант задачи, похожей на задачи 15** и 16**.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Одна сторона треугольника равна 2,8 см, вторая равна 1,2 см. Чему равно отношение высот, проведённых к этим сторонам?

1) 2 : 3; 2) 3 : 4; 3) 1 : 2; 4) 3 : 7.

1.2. Если в треугольнике длина стороны 1,2 см, а длина высоты к ней равна 5 см, то удвоенная площадь треугольника равна:

1) 12,4 см; 2) 12 см; 3) 6 см; 4) 7,8 см.

1.3. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 10$ см, $BC = 12$ см высота, проведённая к стороне AB, равна 6 см. Чему равна высота, проведённая к стороне BC?

1) 4 см; 2) 5 см; 3) 8 см; 4) 9 см.

1.4. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $AD : DC = 2 : 3$. Площадь треугольника ABC равна 15 см^2. Чему равна площадь треугольника ABD?

1) 10 см^2; 2) 8 см^2; 3) 6 см^2; 4) 4 см^2.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В треугольнике ABC (рис. 22) точки K, L, M — середины сторон. Площадь треугольника ABC равна S. Треугольники каких площадей присутствуют на рисунке?

1) S; 2) $\frac{1}{4}S$; 3) $\frac{1}{2}S$; 4) $\frac{3}{4}S$.

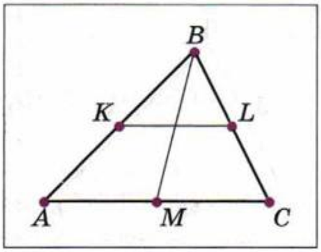


Рис. 22

2.2. При каких значениях стороны a и проведённой к ней высоты h площадь тругольника равна 66 см^2?

1) $a = 6$ см, $h = 11$ см; 2) $a = 12$ см, $h = 11$ см;
3) $a = 11$ см, $h = 12$ см; 4) $a = 11$ см, $h = 6$ см.

2.3. В ромбе $ABCD$ (рис. 23) сторона BC разделена на 5 равных отрезков точками E, F, G, H. Площади каких треугольников равны $\frac{1}{5}$ площади ромба?

1) ΔDCH; 2) ΔAEG; 3) ΔDEH; 4) ΔDFH.

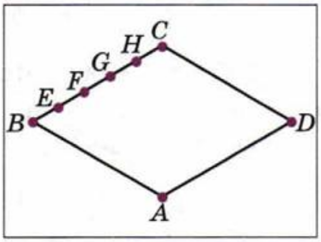


Рис. 23

2.4. Точка K на стороне AB делит основание треугольника ABC в отношении $AK : KB = m : n$. При каких m и n площадь треугольника AKC будет составлять $\frac{1}{7}$ площади треугольника ABC?

1) 2 и 15; 2) 2 и 5; 3) 1 и 7; 4) 1 и 6.

Глава 5
УРАВНЕНИЯ

В этой главе говорится об уравнениях, вводится важное понятие равносильности уравнений, рассматриваются некоторые приёмы решения уравнений, разбирается решение некоторых задач с помощью уравнений, приводится несколько примеров уравнений с двумя неизвестными.

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

1.1. Уравнения с одним неизвестным. Рассмотрим два буквенных выражения, например, $3x - 2$ и $-4x - 5$. При некоторых числовых значениях переменной x эти выражения принимают различные значения. Например, при $x = 0$ получим значения -2 и -5, при $x = -\frac{2}{3}$ получим значения -4 и $-\frac{7}{3}$. Однако при $x = -\frac{3}{7}$ значения обоих выражений равны числу $-\frac{23}{7}$, то есть имеет место равенство

$$3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) - 2 = -4 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) - 5.$$

Таким образом, для выражений $3x - 2$ и $-4x - 5$ можно сформулировать следующую задачу: «Найдите все значения переменной величины x, при которых значения выражений $3x - 2$ и $-4x - 5$ равны».

Кратко эту задачу записывают так: «Найдите все значения x, при которых $3x - 2 = -4x - 5$». Или так: «Решите уравнение $3x - 2 = -4x - 5$». В этом случае запись $3x - 2 = -4x - 5$ называют уравнением.

В этом случае запись $3x - 2 = -4x - 5$ называют *уравнением с одной переменной* (*с одним неизвестным*).

Каждое значение переменной x, при котором обе части уравнения равны, называется *корнем уравнения*.

Ранее мы видели, что число $-\frac{3}{7}$ является корнем уравнения $3x - 2 = -4x - 5$.

Вопрос. Корень какого уравнения равен разности $a - b$ двух чисел?

1.2. Линейные уравнения. Буквенное выражение вида $ax + b$, где x —переменная величина, a, b — постоянные числа, называется *линейным выражением относительно переменной x*.

Например, линейными являются выражения: $2x + 1$, $3x - 2$, $4x - 5$, $-6x - 7$.

Уравнение, в котором левая и правая части являются линейными выражениями, называется *линейным* уравнением.

Например, уравнения $x + 1 = 0$, $2x = 1$, $3x - 2 = -4x - 5$, $6x + 7 = 6x + 8$ являются линейными.

Вопрос. Является ли число 5 корнем уравнения $2x + 4 = 3x - 1$?

1.3. Примеры линейных уравнений, имеющих единственный корень. Линейные уравнения решаются при помощи преобразований, использующих свойства числовых равенств и законы сложения, умножения, вычитания, деления.

Пример 1. Решить уравнение $x = 5$.

Пусть число a является корнем данного уравнения, то есть выполняется числовое равенство $a = 5$. Таким образом, корнем уравнения может быть только число 5, то есть уравнение $x = 5$ не может иметь корней, отличных от числа 5.

Подставив число 5 вместо x в уравнение $x = 5$, получим равенство $5 = 5$. Значит, 5 является корнем уравнения $x = 5$.

В результате получаем, что число 5 является единственным корнем уравнения $x = 5$.

Ответ: 5.

Пример 2. Решить уравнение $2x = 3$.

Пусть число a является корнем данного уравнения, то есть выполняется числовое равенство $2 \cdot a = 3$. Умножив обе части этого равенства на ненулевое число $\frac{1}{2}$, получим равенство $a = \frac{3}{2}$. Таким образом, корнем уравнения может быть только число $\frac{3}{2}$, то есть уравнение $2x = 3$ не может иметь корней, отличных от числа $\frac{3}{2}$.

Подставив число $\frac{3}{2}$ вместо x в уравнение $2x = 3$, получим запись $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$, которая является числовым равенством. Значит, число $\frac{3}{2}$ является корнем уравнения $2x = 3$.

В результате получаем, что число, равное $\frac{3}{2}$, является единственным корнем уравнения $2x = 3$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $1 - 4x = \frac{5}{2}$.

Пусть число a является корнем данного уравнения, то есть выполняется числовое равенство $1 - 4 \cdot a = \frac{5}{2}$.

Прибавив к обеим частям этого равенства число -1, получим равенство $1 - 4 \cdot a - 1 = \frac{5}{2} - 1$. Приведя подобные в каждой части, получим:

$$-4 \cdot a = \frac{3}{2}.$$

Умножим обе части последнего равенства на ненулевое число $-\frac{1}{4}$:

$$\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-4) \cdot a = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{2}.$$

Выполнив арифметические действия в каждой из частей этого равенства, получим, что $a = -\frac{3}{8}$. Таким образом, корнем уравнения может быть только число $-\frac{3}{8}$, то есть уравнение $1 - 4x = \frac{5}{2}$ не может иметь корней, отличных от числа $-\frac{3}{8}$.

Подставив число $-\frac{3}{8}$ вместо x в уравнение $1 - 4x = \frac{5}{2}$, получим запись $1 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{5}{2}$, которая является числовым равенством. Значит, число $-\frac{3}{8}$ является корнем уравнения $1 - 4x = \frac{5}{2}$.

В результате получаем, что число, равное $-\frac{3}{8}$, является единственным корнем уравнения $1 - 4x = \frac{5}{2}$.

Ответ: $-\frac{3}{8}$.

Пример 4. Решить уравнение $7x - 6 = 8x + 2$.

Пусть число a является корнем данного уравнения, то есть верно числовое равенство $7 \cdot a - 6 = 8 \cdot a + 2$.

Выполним несколько преобразований. Сначала прибавим к обеим частям выражение $-7 \cdot a$:

$$-7 \cdot a + 7 \cdot a - 6 = -7 \cdot a + 8 \cdot a + 2.$$

Затем приведём подобные члены в левой и правой частях:

$$0 \cdot a - 6 = 1 \cdot a + 2 \quad \text{или} \quad -6 = a + 2.$$

Прибавим к обеим частям число -2: $-2 - 6 = -2 + a + 2$.

Приведя подобные члены в левой и правой частях, получим $-8 = a$, откуда следует, что $a = -8$. Таким образом, корнем уравнения может быть только число -8, то есть уравнение $7x - 6 = 8x + 2$ не может иметь корней, отличных от числа -8.

Подставив число -8 вместо x в уравнение $7x - 6 = 8x + 2$, получим числовое равенство. В результате получаем, что число -8 является единственным корнем уравнения $7x - 6 = 8x + 2$.

Ответ: -8.

Вопрос. Сколько корней имеет уравнение $\frac{3}{4} \cdot x = 0$?

1.4. Линейное уравнение, имеющее бесконечно много корней. Рассмотрим уравнение $0 \cdot x = 0$.

Пусть число a является корнем этого уравнения, то есть выполняется равенство $0 \cdot a = 0$. Из свойства нуля получаем, что a может быть любым числом. Значит, корнями уравнения $0 \cdot x = 0$ являются все числа.

Вопрос. Какие корни имеет уравнение $6x - 2 = 6x - 2$?

1.5. Линейное уравнение, не имеющее корней. Рассмотрим уравнение $0 \cdot x = 1$.

Предположим, что число a является корнем этого уравнения, то есть $0 \cdot a = 1$. Такого равенства для чисел не может быть, так как при любом значении a произведение $0 \cdot a$ равно 0 и 0 не равен 1. Поэтому уравнение $0 \cdot x = 1$ не имеет корней.

Вопрос. Сколько корней имеет уравнение $6x - 0{,}5 = 6x + 0{,}5$?

1.6. О преобразованиях линейного уравнения. Рассмотрим уравнение

$$7x - 6 = 8x + 2. \qquad (1)$$

Если число a является корнем данного уравнения, то выполняется числовое равенство

$$7 \cdot a - 6 = 8 \cdot a + 2. \qquad (2)$$

1) Прибавим к обеим частям этого равенства числовое выражение $-7 \cdot a$:

$$-7 \cdot a + 7 \cdot a - 6 = -7 \cdot a + 8 \cdot a + 2. \qquad (3)$$

В результате получаем, что число a будет корнем уравнения

$$-7 \cdot x + 7 \cdot x - 6 = -7 \cdot x + 8 \cdot x + 2. \qquad (4)$$

Обратно, если число a является корнем уравнения (4), то выполняется числовое равенство (3). Прибавляя к обеим частям этого равенства числовое выражение $7 \cdot a$, получаем числовое равенство (2). Таким образом, число a является корнем уравнения (1). В результате мы получили, что уравнения (1) и (4) имеют одни и те же корни.

2) Приводя подобные члены в левой части числового равенства (3), получим равенство

$$-7 \cdot a + 7 \cdot a - 6 = 0 \cdot a - 6. \qquad (5)$$

Приводя подобные члены в правой части числового равенства (3), получаем

$$-7 \cdot a + 8 \cdot a + 2 = a + 2. \qquad (6)$$

Поэтому $0 \cdot a - 6 = a + 2$ или $-6 = a + 2$.

$$-6 = a + 2. \qquad (7)$$

Таким образом, число a является корнем уравнения

$$-6 = x + 2. \qquad (8)$$

Обратно, если число a является корнем уравнения (8), то выполняется числовое равенство (7). Используя равенства (5) и (6), получаем равенство (3). Таким образом, число a является корнем уравнения (4).

В результате мы получили, что уравнения (4) и (8) имеют одни и те же корни.

3) Аналогично можно показать, что одни и те же корни имеют уравнение (8) и уравнение

$$-2 - 6 = -2 + x + 2; \qquad (9)$$

уравнение (9) и уравнение

$$-8 = x; \qquad (10)$$

уравнение (10) и уравнение

$$x = -8. \qquad (11)$$

В результате мы получили, что уравнение (1) имеет те же корни, что и уравнение (11).

Вопрос. Сколько корней имеет уравнение $0 \cdot x = \frac{3}{4}$?

1.7. Сокращённая запись решения линейного уравнения. Решение линейного уравнения можно представить сокращённо, записывая результаты преобразований в виде последовательности уравнений, имеющих те же корни, что и исходное уравнение. Например, решение уравнения из п. 1.6 можно записать так:

$$7x - 6 = 8x + 2,$$

$$-7 \cdot x + 7 \cdot x - 6 = -7 \cdot x + 8 \cdot x + 2,$$

$$-6 = x + 2, \qquad -2 - 6 = -2 + x + 2,$$
$$-8 = x, \quad x = -8.$$

Ответ: -8.

Вопрос. Как записать сокращённо решение уравнения из примера 3?

1.8. Исследование уравнения $kx = b$ в общем виде.** Проведём исследование уравнения вида $kx = b$, где k, b — фиксированные числа, x — неизвестная величина.

Возможны несколько случаев.

Случай 1. Пусть $k \neq 0$. Тогда уравнение $kx = b$ и уравнение $\frac{1}{k} \cdot kx = \frac{1}{k} \cdot b$ или $x = \frac{b}{k}$ имеют единственный корень $\frac{b}{k}$.

Случай 2. Пусть $k = 0$ и $b \neq 0$. Тогда уравнение имеет вид $0 \cdot x = b$ и не имеет корней.

Случай 3. Пусть $k = 0$ и $b = 0$. Тогда уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ и любое число является корнем этого уравнения.

Вопрос. Какие корни имеет уравнение $ax = a$, где a — фиксированное число, x — неизвестная величина?

1.9. Линейное уравнение с параметром.** Рассмотрим пример *задачи с параметром*.

Пример 5. Найти, при каких числовых значениях a уравнение $(a + 1) \cdot x = 5$ не имеет корней относительно неизвестной x.

Если число $a + 1$ не равно нулю, то уравнения $(a + 1) \cdot x = 5$, $\frac{1}{(a+1)} \cdot (a + 1) \cdot x = \frac{5}{(a+1)}$ и уравнение $x = \frac{5}{(a+1)}$ имеют единственный корень $\frac{5}{(a+1)}$.

Число $a + 1$ равно нулю при $a = -1$. В этом случае уравнение имеет вид $0 \cdot x = 5$ и не имеет корней, как показано в пункте 1.8.

Ответ: при $a = -1$ уравнение $(a + 1) \cdot x = 5$ не имеет корней.

Вопрос. При каком значении параметра a уравнение $0 \cdot x = a$ имеет хотя бы два различных корня?

1.10. Примеры задач на составление уравнений.

Пример 6. Туристы должны были пройти 200 км. Пройдя несколько километров, они сделали первый привал. Затем туристы прошли ещё 20 км и сделали второй привал. После этого оказалось, что им осталось пройти в 3 раза больше, чем уже пройдено. На каком расстоянии от начала пути туристы сделали первый привал?

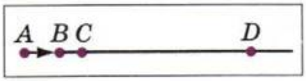


Рис. 1

Изобразим схематически условие задачи, где A — начало пути, B — место первого привала, C — место второго привала, D — конец пути (рис. 1).

Известно, что

$$BC = 20 \text{ км},$$

$$AD = 200 \text{ км},$$

$$CD = 3 \cdot AC.$$

Пусть z км — расстояние, которое прошли туристы до первого привала, то есть $AB = z$ (км). Тогда

$$AC = (z + 20) \text{ км},$$

$$CD = 3(z + 20) \text{ км},$$

$$AD = AC + CD = ((z + 20) + 3(z + 20)) \text{ км}.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$(z + 20) + 3(z + 20) = 200.$$

Решение этого уравнения представим сокращённо, записывая результаты преобразований в виде последовательности уравнений, имеющих те же корни, что и исходное уравнение:

$$4z + 80 = 200.$$

$$4z = 120.$$

$$z = 30.$$

Ответ: 30 км.

Пример 7. Первый экскаватор вынимает в час на 100 кубических метров земли больше, чем второй. Оба экскаватора вынули 4450 кубических метров земли, причём первый работал 7 ч, а второй — 8 ч. Сколько кубических метров вынимает в час каждый экскаватор?

Пусть второй экскаватор вынимает в час x м^3 земли. Тогда первый экскаватор вынимает в час $(x + 100)$ м^3 земли. Первый экскаватор, работая 7 ч, вынул $7(x + 100)$ м^3 земли, а второй за 8 ч вынул $8x$ м^3 земли. Значит, вместе они вынули $(7(x + 100) + 8x)$ м^3 земли. Поэтому получаем уравнение

$$7(x + 100) + 8x = 4450.$$

Решение этого уравнения представим сокращённо, записывая результаты преобразований в виде последовательности уравнений, имеющих те же корни, что и исходное уравнение:

$$7x + 700 + 8x = 4450,$$

$$15x = 3750, \quad x = 250.$$

Ответ: 350 м^3 земли в час вынимает первый экскаватор, 250 м^3 земли в час — второй.

Вопрос. Как изменится ответ задачи в примере 7, если первый экскаватор будет работать 4 часа, а второй — 11 часов?

1.11.* Текстовая задача на проценты.

Пример 8. Из молока, жирность которого 5%, делают творог жирностью $15{,}5\%$. При этом остаётся сыворотка жирностью $0{,}5\%$. Определить, сколько килограммов творога получится из 100 кг молока.

Известно, что жирность продукта в процентах — это отношение массы жиров к общей массе этого продукта, умноженное на 100.

Пусть из 100 кг молока получается t кг творога. Творог имеет жирность $15{,}5\%$, поэтому количество жиров в твороге равно $t \cdot \dfrac{15{,}5}{100}$ (кг).

Если мы получили t кг творога, то сыворотки осталось $(100 - t)$ кг. В этом количестве сыворотки жиров содержится $\dfrac{(100-t)\cdot 0{,}5}{100}$ (кг).

В 100 кг молока содержится $\dfrac{100 \cdot 5}{100}$ кг жиров. Жиры, содержащиеся в 100 кг молока, распределены на $\dfrac{15{,}5}{100}$ (кг) в твороге и $\dfrac{(100-t)\cdot 0{,}5}{100}$ (кг) в сыворотке. Поэтому получаем уравнение

$$\frac{100 \cdot 5}{100} = \frac{15{,}5 \cdot t}{100} + \frac{(100-t)\cdot 0{,}5}{100}.$$

Решение этого уравнения представим сокращённо, записывая результаты преобразований в виде последовательности уравнений, имеющих те же корни, что и исходное уравнение:

$$1000 = 31t + 100 - t,$$

$$900 = 30 \cdot t,$$

$$t = 30.$$

Ответ: 30 кг.

Отметим, что при решении задачи с помощью уравнения у нас есть свобода выбора, во-первых, буквы для обозначения неизвестной и, во-вторых, величины, обозначаемой через неизвестную.

Вопрос. Сколько творога получится из 1 тонны молока при условиях из примера 8?

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют линейным выражением с одной переменной?

2. Что такое линейное уравнение с одним неизвестным?

3. Сколько корней может иметь линейное уравнение с одним неизвестным?

4. Какие примеры линейных уравнений вам известны?

5.** Как решаются линейные уравнения в общем виде?

6. Как объяснить, что уравнение $\frac{7x+2}{8x+3} = \frac{4}{5}$ не является линейным?

7. Как определяется 1% от величины?

Задачи и упражнения

1. Решите уравнения:

а) $8x + 1 = 7x - 2$;

б) $5x - 3 = 3x - 2$;

в) $0{,}75x = 1{,}25x - 1$;

г) $\frac{1}{3}y + \frac{1}{5} = \frac{2}{3}y - \frac{2}{9}$;

д) $0{,}01x - 2 = 0{,}01x - 3$;

е) $3x + 2 = 2x + 5 + x$;

ё) $1{,}75x + x - 2x + 5 - 7 = 0{,}75x - x + 1$;

ж) $1{,}001x + x = 2{,}002x - x$;

з) $1{,}0005y - y = 2{,}0015y - y - 1{,}001y$.

2. На трёх полках расположены книги так, что на второй полке книг вдвое больше, чем на первой, а на третьей — вдвое больше, чем на второй. Определите, сколько книг на каждой полке, если всего на трёх полках 154 книги.

3. Сумма двух чисел равна 407, причём первое слагаемое в 10 раз больше, чем второе. Найдите эти числа.

4. Уменьшаемое в три раза больше вычитаемого, и разность равна 78. Найдите уменьшаемое и вычитаемое.

5. На станции два состава. В одном на 12 вагонов больше, чем в другом. Когда отцепили по 6 вагонов от каждого состава, длина одного состава стала в 4 раза больше длины другого состава. Сколько вагонов в каждом составе?

6. Один кусок проволоки на 56 мм длиннее другого. После того как от каждого из кусков отрезали по 12 мм, второй кусок оказался в 5 раз короче другого. Чему равна длина каждого куска проволоки?

7. Всего куплено 90 тетрадей, причём тетрадей в клетку куплено в 2 раза больше, чем тетрадей в линейку. Сколько куплено тетрадей в клетку и сколько в линейку?

8. Из пассажирского поезда некто заметил, что встречный товарный поезд прошёл мимо за 10 с. Определите скорость товарного поезда, если известно, что его длина 250 м, а скорость пассажирского поезда равна 50 км/ч.

9. Два самолёта вылетели из двух городов навстречу друг другу. Расстояние между городами 3000 км. Известно, что скорость одного самолёта на 100 км/ч больше скорости другого самолёта и что самолёты встретились через 2 ч после вылета. Определите скорость каждого самолёта.

10. После смешивания растворов, содержащих 25% и 60% кислоты, получили 500 г 39%-го раствора кислоты. Определите, сколько граммов каждого раствора потребовалось для этого.

11. Имеется два сплава. В одном сплаве содержится 20% олова, в другом — 30% олова. Сколько килограммов первого и второго сплава нужно взять, чтобы получить 10 кг нового сплава, содержащего 27% олова?

12. Имеются два сплава, в одном из которых 40% серебра, во втором — 20% серебра. Сколько килограммов второго сплава нужно прибавить к 20 килограммам первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 32% серебра?

13. Имеются два сплава, в одном из которых 10% меди, а в другом — 20% меди. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 15 кг нового сплава, содержащего 14% меди?

14. Свежая малина содержит 94% воды, сушёная — 19%. Сколько сушёной малины получится из 18 кг свежей?

15. Сплав меди и серебра весит 9 кг и содержит 17% серебра. Сколько меди нужно добавить к сплаву, чтобы содержание серебра в нём снизилось до 15%?

16. Составьте задачу, решение которой привело бы к уравнению $2x + 3x = 45$.

17.** Произведение двух последовательных целых чисел на 14 меньше, чем произведение следующих двух последовательных целых чисел. Найдите эти числа.

18. В загоне находятся страусы и лошади. У всех вместе 36 голов и 100 ног. Сколько в загоне страусов и лошадей?

19. В трёх классах 91 ученик. В первом классе на 3 ученика меньше, чем во втором классе. Во втором классе на 4 ученика меньше, чем в третьем классе. Определите, сколько учеников в каждом классе.

20. Поезд проходит расстояние от A до B за 10 ч 40 мин. Если бы скорость поезда была на 10 км/ч меньше, то он прибыл бы в B на 2 ч 8 мин позже. Определите расстояние между пунктами A и B и скорость поезда.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Укажите уравнение, которое имеет своим корнем число 2:

1) $3x - 5 = 5x - 3$; 2) $3x + 5 = 3x + 5$;
3) $5x - 3 = 3x + 5$; 4) $5x - 3 = 5x + 3$.

1.2. Укажите уравнение, которое при $b = 2$ имеет решением любое число:

1) $b(x + 5) = x + 7$; 2) $x + b = 7x - 124$;
3) $b(2x - 5) = 4x + 7$; 4) $4(2x - 3) = b(4x + 1) - 8$.

1.3. Сплавляют 2 кг сплава с 20%-м содержанием олова и 3 кг сплава с 40%-м содержанием олова. Какой процент олова в получившемся сплаве?

1) 28%; 2) 30%; 3) 32%; 4) 34%.

1.4. Укажите уравнение, которое при $b = 5$ не имеет решений:

1) $13x - b(x + 2) = 2bx + 2$; 2) $3(b + 2)x + 7 = 41x - 3 - 4b(x - 1)$;
3) $15x - 3b = 3bx - 15$; 4) $x + 2 = 7bx$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Укажите все линейные уравнения, у которых число 2 является решением:

1) $2x - 3 = 3x - 5$; 2) $\frac{2x - 3}{2} = \frac{3x - 5}{2}$;
3) $2x + 3 = 4x - 1$; 4) $\frac{3(2x - 3)}{5} = \frac{3x - 15}{5}$.

2.2. Укажите все линейные уравнения, которые имеют более одного решения:

1) $15x - 77 = -(77 - 15x)$; 2) $15x + 9 = 5(3x - 2) + 19$;
3) $(5x - 7)\frac{3}{7} = (5x - 7) \cdot \frac{7}{3}$; 4) $2x - (x + 1) = x - 1$.

2.3. Укажите все выражения, которые после приведения подобных в многочленах становятся линейными уравнениями:

1) $(x - 3)^2 - (x + 5)^2 = 0$; 2) $(x - 2)^2 - (2x + 1)^2 = 0$;
3) $(x - 3)^2 + (x + 5)^2 = 1$; 4) $(x - 3)^2 - (x + 5)^2 = x$.

2.4. Укажите все выражения, которые после приведения подобных в многочленах не становятся линейными уравнениями:

1) $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = 0$; 2) $(2x - 2)^2 - (2x + 1)^2 = 0$;
3) $(x - 3)^2 + (x + 5)^2 = 1$; 4) $(x - 3)^2 - (x + 5)^2 = x^2$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

2.1. Алгебраические уравнения. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — два буквенных выражения, в запись которых входит переменная, обозначенная через x.

При некотором числовом значении c переменной x эти выражения $A(c)$ и $B(c)$ могут принимать различные значения.

При некотором числовом значении d переменной x может выполняться равенство $A(d) = B(d)$.

Для выражений $A(x)$ и $B(x)$ можно сформулировать следующую задачу: «Найдите все такие числовые значения d переменной величины x, при каждом из которых выполняется числовое равенство $A(d) = B(d)$».

Кратко эту задачу записывают так: «Найти все значения x, при которых $A(x) = B(x)$». Или так: «Решить уравнение $A(x) = B(x)$».

В этом случае запись $A(x) = B(x)$ называют *уравнением с одним неизвестным* (*с одной переменной*).

В уравнении $A(x) = B(x)$ выражение $A(x)$ называют левой частью уравнения, выражение $B(x)$ — правой частью уравнения.

Каждое числовое значение d переменной x, при котором обе части уравнения равны, называется *корнем уравнения* $A(x) = B(x)$.

Иногда корень уравнения называют *решением* уравнения.

Числовые выражения, не содержащие буквы x, иногда также удобно обозначать через $A(x)$, $B(x)$ и так далее. Заметим, что вместо переменной x могут использоваться и другие буквы.

Если $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены от переменной x, то уравнение $A(x) = B(x)$ называется *алгебраическим* уравнением от x.

Пример 1. Рассмотрим алгебраическое уравнение $x(x + 1) = 0$. Числа 0 и -1 являются его корнями, потому что выполняются равенства $0 \cdot (0 + 1) = 0$ и $(-1) \cdot (-1 + 1) = 0$. Других корней нет, потому что если произведение двух чисел равняется нулю, то хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Вопрос. Почему уравнения $A(x) = B(x)$ и $B(x) = A(x)$ имеют одни и те же корни?

2.2. Множество корней уравнения. Пустое множество корней. Пусть задано уравнение $A(x) = B(x)$. Обозначим через M набор всех его корней. Часто M называют *множеством решений* или *множеством корней* уравнения $A(x) = B(x)$.

Если уравнение не имеет корней, то в этом случае говорят, что множество корней уравнения является *пустым множеством*.

Решить уравнение — значит либо найти все корни уравнения, либо доказать, что это уравнение не имеет корней.

Вопрос. Какой пример уравнения с пустым множеством корней рассматривался в первом параграфе?

2.3. Равносильность уравнений. Уравнения называются *равносильными*, если множества корней этих уравнений совпадают.

В п. 1.7 были выписаны шесть уравнений: $7x - 6 = 8x + 2$; $-7 \cdot x + 7 \cdot x - 6 = -7 \cdot x + 8 \cdot x + 2$; $-6 = x + 2$; $-2 - 6 = -2 + x + 2$; $-8 = x$; $x = -8$, каждое из которых имеет единственный корень (-8). Таким образом, все эти уравнения имеют одно и то же множество корней (состоящее из одного и того же числа), то есть эти уравнения равносильны.

Пример 2. Уравнения $(x + 1)(x - 1)x = 0$ и $(x - 1)(x + 1)x = 0$ равносильны. Действительно, произведение нескольких чисел может равняться нулю только в том случае, когда один из множителей равен нулю. Поэтому первое уравнение обращается в верное числовое равенство в одном из трёх случаев: или $x + 1 = 0$, или $x - 1 = 0$, или $x = 0$. Следовательно, корнями уравнения $(x + 1)(x - 1)x = 0$ являются только три числа: -1; 0; 1.

Аналогично доказывается, что корнями уравнения $(x - 1)(x + 1)x = 0$ тоже являются только три числа: -1; 0; 1.

Поэтому уравнения $(x + 1)(x - 1)x = 0$ и $(x - 1)(x + 1)x = 0$ равносильны.

Вопрос. Почему равносильны уравнения, каждое из которых не имеет корней?

2.4. Перестановка частей уравнения. При решении уравнений обычно стараются выполнять преобразования, приводящие к уравнению, равносильному заданному уравнению.

Рассмотрим уравнение $2x = 1$. Оно имеет только один корень $\frac{1}{2}$. Поменяем местами левую и правую части уравнения $2x = 1$ и получим новое уравнение $1 = 2x$. Это уравнение тоже имеет только один корень $\frac{1}{2}$.

Следовательно, при перестановке частей уравнения $2x = 1$ получается равносильное ему уравнение $1 = 2x$.

Отмеченное правило справедливо в общем случае.

Уравнение $A(x) = B(x)$ равносильно уравнению $B(x) = A(x)$.

Вопрос. Как показать, что уравнения $x^3 - x = 0$ и $0 = x(x - 1)(x + 1)$ равносильны?

2.5. Замена одной части уравнения на тождественно равное ей выражение. Рассмотрим уравнение $x^2 - 25 = 0$. Известно тождество $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Подставляя в это тождество переменную x вместо буквы a и число 5 вместо буквы b, получаем тождество $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$. Отсюда следует, что если для некоторого числового значения x одно из числовых выражений $x^2 - 25$ и $(x + 5)(x - 5)$ равно нулю, то и другое числовое выражение равно нулю. Поэтому уравнения $x^2 - 25 = 0$ и $(x + 5)(x - 5) = 0$ имеют одинаковые корни, то есть равносильны.

Отмеченное правило справедливо в общем случае.

Пусть $A(x)$ тождественно равно $C(x)$. Тогда уравнение $A(x) = B(x)$ равносильно уравнению $C(x) = B(x)$.

***Вопрос*.** Какие корни имеет уравнение $(x + 5)(x - 5) = 0$?

2.6. Прибавление к обеим частям уравнения одного и того же выражения. Рассмотрим уравнение

$$2x - 1 = 2 + x.$$

Пусть a — корень этого уравнения, то есть выполняется числовое равенство

$$2a - 1 = 2 + a.$$

Прибавим к обеим его частям числовое выражение $(1 - a)$. Получим числовое равенство

$$2a - 1 + (1 - a) = 2 + a + (1 - a).$$

Следовательно, число a является корнем уравнения

$$2x - 1 + (1 - x) = 2 + x + (1 - x).$$

Верно и обратное: если число b является корнем уравнения $2x - 1 + (1 - x) = 2 + x + (1 - x)$, то это число b будет также корнем исходного уравнения $2x - 1 = 2 + x$.

Таким образом, уравнения $2x - 1 = 2 + x$ и $2x - 1 + (1 - x) = 2 + x + (1 - x)$ равносильны.

Отмеченное правило справедливо в общем случае.

Пусть $D(x)$ — произвольное всюду определённое выражение. Тогда уравнение $A(x) = B(x)$ равносильно уравнению

$$\boldsymbol{A(x) + D(x) = B(x) + D(x).}$$

***Вопрос*.** Как доказать, что если число b является корнем уравнения $2x - 1 + (1 - x) = 2 + x + (1 - x)$, то это число b будет также корнем уравнения $2x - 1 = 2 + x$?

2.7. Умножение обеих частей уравнения на ненулевое число. Рассмотрим уравнение $5x - 1 = 4$.

Пусть a — корень этого уравнения, то есть выполняется числовое равенство $5a - 1 = 4$. Умножим обе части равенства на ненулевое число $\frac{1}{5}$. Получим числовое равенство $a - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Следовательно, число a является корнем уравнения $x - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Верно и обратное: если число b является корнем уравнения $x - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, то число b будет также корнем уравнения $5x - 1 = 4$.

Таким образом, уравнения $5x - 1 = 4$ и $x - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ равносильны.

Отмеченное правило справедливо в общем случае.

Пусть r — ненулевое число. Тогда уравнение $A(x) = B(x)$ равносильно уравнению $rA(x) = rB(x)$.

Вопрос. Какие корни имеет уравнение $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$?

2.8. Элементарные преобразования уравнений. При решении уравнений с одним неизвестным используют правила, позволяющие получать равносильные уравнения:

изменение местами частей уравнения;

выполнение тождественных преобразований в левой или правой части;

прибавление к обеим частям уравнения одного и того же всюду определённого выражения;

умножение обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое число.

Эти правила также называют *элементарными преобразованиями* уравнений.

Пример 3. Решить уравнение $x^2 + 1 = 2x$.

Прибавив к обеим частям выражение $-2x$, получим $x^2 - 2x + 1 = 0$. Заменив в тождестве $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ букву a на переменную x и букву b на число -1, получим тождество $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

Следовательно, уравнение $x^2 + 1 = 2x$ равносильно уравнению $(x - 1)^2 = 0$ или уравнению $(x - 1)(x - 1) = 0$.

Поскольку произведение нескольких чисел может равняться нулю только в том случае, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, то и произведение $(x - 1)(x - 1)$ равно 0 только в том случае, когда $x - 1 = 0$.

Следовательно, уравнение $x^2 + 1 = 2x$ равносильно уравнению $x = 1$.

Ответ: 1.

Вопрос. Как найти все решения уравнения $A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = 0$, если известно, что уравнение $A(x) = 0$ не имеет корней?

2.9.** Примеры преобразований, нарушающих равносильность.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $(x-1)^2=(1-x)^2$.

Левая часть этого уравнения тождественно равна правой части, потому что $(x-1)^2=x^2-2x+1$, $(1-x)^2=1-2x+x^2$ и $x^2-2x+1=1-2x+x^2$. Поэтому корнями данного уравнения являются все числа.

Если же выполнить не элементарное преобразование — заменить равенство квадратов выражений на равенство самих выражений, то получим уравнение $x-1=1-x$, имеющее единственный корень 1.

В результате множество корней уравнения $(x-1)^2=(1-x)^2$ и множество корней уравнения $x-1=1-x$ различны.

Тем самым при переходе от уравнения $(x-1)^2=(1-x)^2$ к уравнению $x-1=1-x$ нарушена равносильность.

Таким образом уравнения $(A(x))^2=(B(x))^2$ и $A(x)=B(x)$ не всегда равносильны.

Пример 5. Рассмотрим уравнение $(x-1)(x-1)=2x(x-1)$.

Если зачеркнуть в левой и правой частях одинаковый множитель $(x-1)$, то получится уравнение $x-1=2x$, которое имеет только один корень -1.

Подставив в уравнение вместо x числа 1 и -1, убеждаемся, что уравнение $(x-1)(x-1)=2x(x-1)$ имеет два корня: -1 и 1.

В этом примере при переходе от уравнения $(x-1)(x-1)=2x(x-1)$ к уравнению $x-1=2x$ тоже нарушена равносильность.

Таким образом, при вычёркивании одинаковых множителей с неизвестным в левой и правой частях уравнения (то есть при сокращении на такой множитель) равносильность может нарушаться.

Вопрос. Нарушится ли равносильность при переходе от уравнения $A(x)B(x)=0$ к уравнению $B(x)=0$, если известно, что уравнение $A(x)=0$ не имеет корней?

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют уравнением с одним неизвестным?

2. Как определяется корень уравнения с одним неизвестным?

3. Может ли уравнение иметь два корня?

4. Какие уравнения называют равносильными?

5. Может ли уравнение не иметь корней?

6. Что значит решить уравнение?

7. Какое равенство называется тождеством?

8. Какие свойства равносильности уравнений вы знаете?

9. Какие преобразования уравнений приводят к равносильным уравнениям?

10.** Как связаны решения двух уравнений вида $A(x) = 0$ и $B(x) = 0$ с решениями уравнения $A(x) \cdot B(x) = 0$?

11.** Какие примеры преобразований, которые могут приводить к неравносильным уравнениям, вы знаете?

Задачи и упражнения

1. Решите уравнение:

а) $x - 5 = 0$; б) $x + 0{,}75 = 0$; в) $-x - 0{,}312 = 0$; г) $-x + 0{,}001 = 0$.

2. Решите уравнение:

а) $7x = 3$; б) $3{,}5x = 1{,}05$; в) $11y = 1{,}001$; г) $-14z = 19{,}6$.

3. Решите уравнение:

а) $6x + 3 = 2$; б) $-8x + 4 = 3$;

в) $3{,}15x - 5 = 8$; г) $-0{,}002x - 3{,}84 = 2$;

д) $1002x - 2 = -1000$; е) $100x + 2 = -105$;

ё) $-205y - 21 = -178$; ж) $-309z + 17 = -198$.

4. Решите уравнение:

а) $(x + 1)(x - 2) = 0$; б) $(x - 1)(x + 3) = 0$;

в) $(x - 1)(x - 2)(x - 30) = 0$; г) $(x - 4)^2(x - 5) = 0$.

5. Решите уравнение:

а) $(x + 1)(x - 2) + 2(x + 1) = 0$;

б) $(x + 3)(x - 4) - 3(x - 4) = 0$;

в) $(x + 5)^2 + (x + 5) = 0$.

6. Являются ли равносильными уравнения?

а) $(x + 1) = 0$ и $(x + 1)^2 = 0$;

б) $(x - 1)(x + 3) = 0$ и $(x + 3)(x - 1) = 0$;

в) $x^2 = 0$ и $x = 0$;

г) $x^2 = 1$ и $x = 1$;

д) $2x + 1 = 0$ и $-\frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{4}$;

е) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$ и $x^4 + 4 = 0$;

ё) $x^2 + 4x + 3 = 0$ и $(x + 1)(x + 3) = 0$.

7.* Решите уравнение:

а) $x^2 = 2x - 1$; б) $x^2 - 4x = -4$; в) $x^2 = -6x - 9$;

г) $x - \frac{1}{4} = x^2$; д) $0{,}25 + x^2 = -x$; е) $x^2 - 9 = 0$;

ё) $(x^2-2)^2-4=0$; ж) $(x^2-2)^2-x^2=0$; з) $x^2-5x=0$;
и) $x^2+7{,}2x=0$; й) $x^2=8x$; к) $-3{,}9x=-x^2$.

8.* Решите уравнение:

а) $(x+1)^2=4^2$; б) $4(x-2)^2=16$;
в) $-(x+4)^2+25=0$; г) $-(-x+5)^2=-36$.

9.** Решите уравнение:

а) $|x|=2$; б) $|x|=0$; в) $|x|+5=3$;
г) $|x+5|=4$; д) $|x-4|=3$; е) $|x-6|=0$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Укажите среди приведённых уравнение, равносильное уравнению $(x-1)^2=(x+1)^2$:

1) $x-1=x+1$; 2) $1-x=x+1$; 3) $4x=1$; 4) $4x+1=0$.

1.2. Укажите уравнение, имеющее корнем число 5:

1) $6x-7=15x-52$; 2) $9x-8=27$;
3) $3-4x=6x-17$; 4) $x^2=x+17$.

1.3. Какое из уравнений равносильно уравнению $2x+5=x+3$?

1) $9x-17=4-3x$; 2) $3x-2=5x-2$;
3) $190x+3=2x-312$; 4) $4x+12=2-x$.

1.4. Какое из уравнений не равносильно уравнению $14x+5=5-11x$?

1) $11x=-4x$; 2) $10x=10x$; 3) $22x=-3x$; 4) $7x=-3x$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Укажите уравнения, имеющие корнем число 0:

1) $x\cdot 0=x^2\cdot 0$; 2) $\frac{x}{x}=1$; 3) $\frac{3x+5}{x}=\frac{7x+5}{2x+1}$; 4) $x^2=x$.

2.2. Укажите уравнения, у которых число корней больше одного:

1) $(x-1)(x-2)=0$; 2) $x^2=0$;
3) $(x-1)\cdot 5=1$; 4) $4(x+1)(2x-13)=0$.

2.3. Укажите все уравнения, равносильные уравнению $4x-5=2x-3$:

1) $(x-1)^2=0$; 2) $3x-10=4x-6$;
3) $13x-9=5x-1$; 4) $(116x+27)5=23x+118$.

2.4. Укажите все уравнения, не равносильные уравнению $4x-5=2x-3$:

1) $(x-2)(x-3)^2=0$; 2) $7(x-1)=2x+2$;
3) $2x=4$; 4) $18(x-1)^2=0$.

§ 3. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

3.1. Алгебраическое уравнение с двумя неизвестными. Для буквенного выражения, в запись которого входят некоторые числа и две переменные x и y, будем использовать обозначения $A(x,y)$, $B(x,y)$ и так далее. Выражение A, не содержащее переменных или содержащее только одну из x и y, иногда также удобно обозначать как $A(x,y)$.

Возьмём два выражения, например, $A(x;y) = 3x - y + 2$ и $B\ (x;y) = 2x + 2y - 4$.

Запишем равенство

$$3x - y + 2 = 2x + 2y - 4$$

с той целью, чтобы найти наборы значений x и y, при которых равенство верно.

В результате получаем *уравнение с двумя неизвестными x и y.*

Выражение $3x - y + 2$ — левая часть полученного уравнения, выражение $2x + 2y - 4$ — правая часть этого уравнения.

Вопрос. Какие уравнения с двумя неизвестными вы знаете?

3.2. Различные способы обозначения неизвестных. В уравнении с двумя неизвестными в качестве переменных не всегда используют буквы x и y.

Например, можно рассмотреть уравнение $S = 3 \cdot t$ с двумя неизвестными S и t.

Вопрос. Какие тождества с двумя переменными вы знаете?

3.3. Решение уравнения с двумя неизвестными. Вернёмся к уравнению $3x - y + 2 = 2x + 2y - 4$ из пункта 3.1.

При подстановке в обе части этого уравнения числа 1 вместо переменной x и числа $\frac{7}{3}$ вместо переменной y получаем равенство

$$3 \cdot 1 - \frac{7}{3} + 2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{7}{3} - 4.$$

Это — числовое равенство. Поэтому пару чисел 1 и $\frac{7}{3}$ называют *решением* уравнения

$$3x - y + 2 = 2x + 2y - 4$$

и обычно записывают в виде $\left(1;\ \frac{7}{3}\right)$. На первом месте пары $\left(1;\ \frac{7}{3}\right)$ стоит число, которое мы подставляем вместо переменной x, на втором месте стоит число, которое мы подставляем вместо переменной y.

Пары $\left(\frac{7}{3}; 1\right)$ и $\left(1; \frac{7}{3}\right)$ — это разные пары значений переменных.

Вопрос. Является ли пара чисел $\left(1; \frac{7}{3}\right)$ решением уравнения $3x - y + 2 - 1 = 2x + 2y - 4$?

3.4. Множество решений уравнения. В связи с понятием решения уравнения с двумя неизвестными возникает задача о нахождении всех решений уравнения.

Решить уравнение — это значит одно из двух: либо найти все решения уравнения, либо доказать, что уравнение не имеет решений.

Набор всех решений уравнения $A(x;y) = B(x;y)$ называют множеством решений этого уравнения. Изображение множества решений уравнения с двумя неизвестными на координатной плоскости иногда называют *графиком* этого уравнения.

В некоторых случаях уравнение может не иметь решений. В этом случае множество решений уравнения является пустым множеством.

Пример 1. В 6 классе мы рассматривали уравнение $x^2 + y^2 = 25$.

Некоторые из решений этого уравнения можно записать в виде пар: (0; 5), (−5; 0), (−3; 4).

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 25$, то есть изображением множества всех решений этого уравнения на координатной плоскости, является окружность радиуса 5 с центром в начале координат (рис. 1).

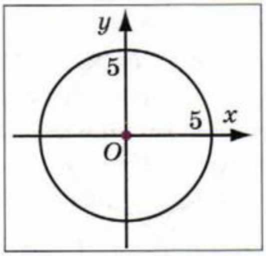


Рис. 1

Пример 2. Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Это уравнение не имеет решений. Действительно, мы знаем, что квадрат любого числа — это неотрицательное число. Поэтому для любых значений a и b числа a^2 и b^2 неотрицательны. Следовательно, число $a^2 + b^2 + 1$ не меньше 1, а значит, не может равняться нулю. Таким образом, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ имеет пустое множество решений.

Вопрос. Какие решения уравнения $x^2 + y^2 = 0$ вы можете найти?

3.5. Равносильные преобразования уравнения с двумя переменными. Будем говорить, что два уравнения

$$A_1(x; y) = B_1(x; y) \text{ и } A_2(x; y) = B_2(x; y)$$

равносильны, если они имеют одно и то же множество решений. При переходе от одного уравнения к равносильному ему другому уравнению множество решений не изменяется.

В § 1 мы сформулировали четыре правила, применение которых к уравнениям с одним неизвестным приводит к равносильным уравнениям.

Сформулируем аналогичные правила для уравнений с двумя неизвестными:

1) Уравнение $A(x; y) = B(x; y)$ равносильно уравнению $B(x; y) = A(x; y)$.

2) Пусть $A(x; y)$ тождественно равно $C(x; y)$. Тогда уравнение $A(x; y) = B(x; y)$ равносильно уравнению $C(x; y) = B(x; y)$.

3) Пусть $D(x; y)$ — произвольное всюду определённое выражение. Тогда уравнение $A(x; y) = B(x; y)$ равносильно уравнению

$$A(x; y) + D(x; y) = B(x; y) + D(x; y).$$

4) Пусть r — ненулевое число. Тогда уравнение $A(x;y) = B(x;y)$ равносильно уравнению $r \cdot A(x;y) = r \cdot B(x;y)$.

Вопрос. Почему уравнение $3x - y + 2 = 2x + 2y - 4$ равносильно уравнению $x - 3y + 6 = 0$?

3.6.* Уравнение $2y + x = x + y + 2$. Данное уравнение равносильно уравнению $2y + x - x - y = x + y + 2 - x - y$. Выполнив тождественные преобразования, получим уравнение $0 \cdot x + y = 2$, равносильное уравнению $2y + x = x + y + 2$.

Несмотря на то что $0 \cdot x \equiv 0$, мы сохраняем запись $0 \cdot x$, чтобы подчеркнуть, что рассматривается уравнение с двумя неизвестными x и y.

Для числовых значений a и b равенство $0 \cdot a + b = 2$ верно только тогда, когда $b = 2$. При этом число a может быть любым.

Таким образом, решениями уравнения $y + 0 \cdot x = 2$ являются пары $(-1; 2)$, $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$, $(1{,}3; 2)$, $(10; 2)$ и вообще пара чисел вида $(a; 2)$ для любого числа a.

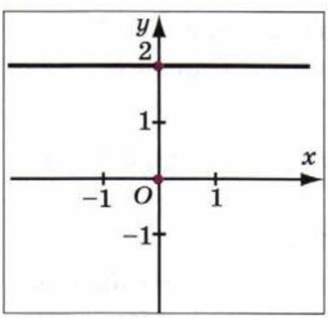


Рис. 2

Полученное множество решений уравнения $0 \cdot x + y = 2$ удобно представить в виде множества точек на координатной плоскости.

Все точки, ордината которых равна 2, расположены на прямой, перпендикулярной оси Oy и проходящей через точку $(0; 2)$. Поэтому графиком уравнения $0 \cdot x + y = 2$ является прямая, параллельная оси Ox (рис. 2).

Вопрос. Какое множество решений имеет уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$?

3.7.* Решение уравнения $x - 2y = 1 - 2y$. Данное уравнение равносильно уравнению $x - 2y + 2y - 1$ или $x + 0 \cdot y = 1$.

Мы сохраняем запись $0 \cdot y$, чтобы подчеркнуть, что рассматривается уравнение с двумя неизвестными x и y. Иногда уравнение $x + 0 \cdot y = 1$ записывают в виде $x = 1$, когда из текста ясно, что речь идёт об уравнении с двумя неизвестными x и y.

Для числовых значений a и b равенство $a + 0 \cdot b = 1$ верно только тогда, когда $a = 1$. При этом число b может быть любым.

Следовательно, любая пара чисел вида $(1; b)$, где b — произвольное число, является решением уравнения $x - 2y = 1 - 2y$. График этого уравнения изображён на рис. 3.

Вопрос. Какое множество решений имеет уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$?

3.8. Уравнение $(x - 1)(y - 2) = 0$. Из свойств умножения следует, что произведение двух чисел только тогда равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому мы найдём все решения уравнения $(x - 1)(y - 2) = 0$, если по очереди приравняем к нулю множители и решим два полученных уравнения $x - 1 = 0$ и $y - 2 = 0$ или равносильные им уравнения $x = 1$ и $y = 2$.

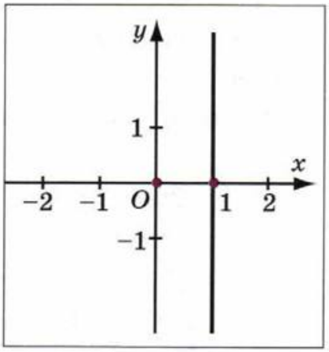


Рис. 3

Уравнение $x = 1$, то есть уравнение $x + 0 \cdot y = 1$ с двумя неизвестными, решено в пункте 3.7, и его решения изображены на рис. 3.

Уравнение $y = 2$, то есть уравнение $0 \cdot x + y = 2$ с двумя неизвестными, решено в пункте 3.6, и его решения изображены на рис. 2.

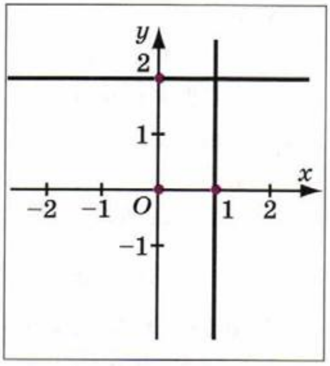


Рис. 4

Следовательно, мы представим все решения уравнения $(x - 1)(y - 2) = 0$, если на одном рисунке изобразим все решения уравнения $x = 1$ и все решения уравнения $y = 2$, что и сделано на рис. 4.

Вопрос. Какой график имеет уравнение $(x - 1)(x - 2) = 0$, рассматриваемое как уравнение с неизвестными x и y?

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют уравнением с двумя неизвестными?
2. Как определяется решение уравнения с двумя неизвестными?
3. Какое уравнение можно назвать тождеством?
4. Что значит решить уравнение?
5. Какие уравнения с двумя неизвестными называют равносильными?
6. Какие свойства равносильности уравнений вы знаете?
7. Что называется графиком уравнения с двумя неизвестными?

Задачи и упражнения

1. Запишите уравнение, не содержащее неизвестных в правой части, равносильное уравнению:

а) $x - 3y + 5 = 4x + 8y - 1$; б) $2x + 3 + 5y = 6 + x + 8y$;
в) $u^2 - uy = uy - y^2$; г) $(z - 1)^2 + t^2 = z^2 + (t - 1)^2$;
д) $5 = 6x + 3z$; е) $x + y + 1 = 2x + 2y + 3$.

2. Являются ли равносильными уравнения:

а) $x - 2y - 1 = 0$ и $y - 0{,}5x + 0{,}5 = 0$;
б) $u^2 + 2uv = 1 - v^2$ и $(u + v)^2 - 1 = 0$;
в) $x^2 = z^2$ и $x = z$;
г) $x^2 = y^2$ и $(x - y)(x + y) = 0$;
д)** $z(z + t) = z(z - t)$ и $z + t = z - t$;
е)** $x^2 + y^2 = 0$ и $|x| + |y| = 0$.

3.* Изобразите на координатной плоскости все решения $(x;\ y)$ уравнения:

а) $xy = 0$; б) $x^2 + y^2 = (x + y)^2$;
в) $(x + 1)(y - 1) = 0$; г) $x^2 + 0 \cdot y^2 = 1$.

4.** Изобразите на координатной плоскости окружность, заданную уравнением:

а) $4x^2 + 4y^2 = 3$; б) $x^2 + x + y^2 + y = 0$;
в) $x^2 + y^2 = 3(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2$; г) $x^2 + y^2 = 3x$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Графиком уравнения $2(3x - 5)(6y + 1) = 0$ является:

1) вертикальная прямая;

2) горизонтальная прямая;

3) две горизонтальные прямые;

4) две перпендикулярные прямые (одна вертикальная и одна горизонтальная).

1.2. Укажите уравнение, график которого — две вертикальные прямые:

1) $(x-1)\cdot 2 = x-3$; 2) $(x-1)(2x-3)=0$;

3) $y^2=0$; 4) $(y-5)(x+6)=0$.

1.3. Укажите уравнение, график которого перпендикулярен графику уравнения $2y=7$:

1) $3y=7$; 2) $x=3y$; 3) $y=7$; 4) $x=7$.

1.4. Сколько общих точек имеют графики уравнений $x^2+y^2=4$ и $x=5$?

1) ни одной; 2) одну; 3) две; 4) больше двух.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Укажите уравнения, графики которых — две вертикальные прямые:

1) $(x-1)(x-2)(x-1)=0$; 2) $x-1=y-2$;

3) $(x-1)(y-1)(x-2)=0$; 4) $x^2=1$.

2.2. Укажите все уравнения, у которых нет решений:

1) $(x-1)+(y-2)=3$; 2) $(x-1)(y-2)=xy$;

3) $(x-2)(y-1)=xy-2y-x+3$; 4) $x^2-y^2-1=(x-y)(x+y)$.

2.3. Укажите уравнения, графики которых — две перпендикулярные прямые:

1) $(x-1)(2y-17)=0$; 2) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$;

3) $(x-2)(y-2)(y-x)=0$; 4) $x^2+2=0$.

2.4.** У каких уравнений с одним неизвестным есть ровно два решения?

1) $x^2+1=5$; 2) $|x|=1$;

3) $x^2= 2x^2+4$; 4) $x+|x|=4$.

Глава 6

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

В этой главе вы узнаете, какие прямые называют параллельными и какое значение в геометрии имеет пятый постулат Евклида.

§ 1. НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

1.1. Непересекающиеся прямые на клетчатой бумаге. Рассмотрим плоскость, расчерченную как клетчатая бумага, и на ней две прямые (рис. 1). Эти прямые не пересекаются. Каждый узел прямой a находится на расстоянии в один шаг сетки от прямой b, а каждый узел прямой b находится на расстоянии в один шаг сетки от прямой a. Поэтому прямые a и b можно назвать *равноотстоящими*.

На плоскости можно рассмотреть любой квадрат $ABCD$. Последовательно приставляя к нему равные квадраты, как на рис. 3, придём к непересекающимся равноотстоящим прямым m и n, как на рис. 4.

Заметим, что построение двух непересекающихся прямых делалось в предположении, что плоскость может быть разбита на квадраты, как клетчатая бумага.

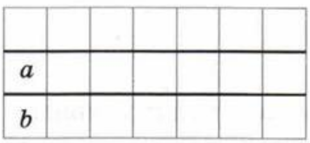


Рис. 1

Представление о *непересекающихся* или равноотстоящих прямых дают два ряда рельсов прямолинейного участка железной дороги, если представить, что они неограниченно продолжены в обе стороны.

Вопрос. Какие ещё примеры непересекающихся прямых вы знаете?

1.2. Два перпендикуляра к одной прямой. Предположим, что найдутся две прямые a

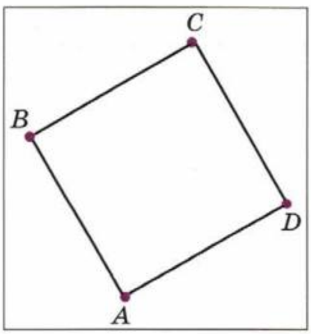


Рис. 2

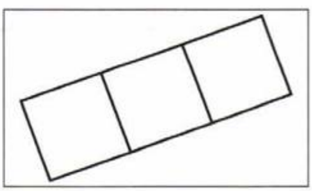


Рис. 3

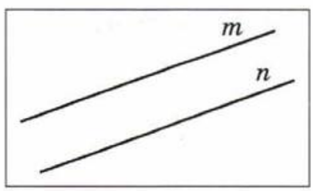


Рис. 4

и b, которые перпендикулярны третьей прямой c и пересекаются. Рассмотрим два случая.

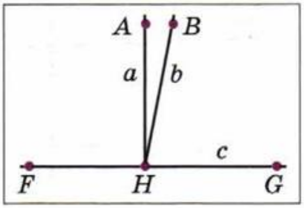


Рис. 5

1) Точка пересечения прямых лежит на прямой c, как изображено на рис. 5.

В этом случае из точки H восставлены два различных перпендикуляра AH и BH. Следовательно, $\angle AHF = \angle AHG = 90°$, $\angle BHF = \angle BHG = 90°$. Поэтому $\angle AHF = \angle BHF = 90°$ и прямые a и b совпадают, так как в одну сторону от луча HF можно отложить только один угол величиной 90°.

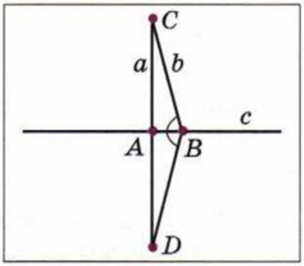


Рис. 6

2) Точка пересечения прямых расположена вне прямой c (рис. 6).

В этом случае из точки C опущены два различных перпендикуляра на прямую c, пусть один пересекает эту прямую в точке A, другой — в точке B. На прямой a отложим отрезок AD, равный AC. Прямоугольные треугольники CAB и DAB равны по двум катетам, поэтому $\angle ABC = \angle ABD$. Но этот угол прямой, его величина 90°, следовательно $\angle CBD = 180°$. Таким образом, точки C, B, D лежат на одной прямой, и прямые a и b совпадают.

И в первом, и во втором случае через точку к прямой можно провести лишь один перпендикуляр, и предположение о том, что прямые a и b пересекаются, неверно. Таким образом, доказано утверждение.

Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, не пересекаются.

Вопрос. Что вы знаете о высотах треугольника?

1.3. Противоположные стороны прямоугольника. Утверждение предыдущего пункта позволяет в качестве следствия получить свойство прямоугольника.

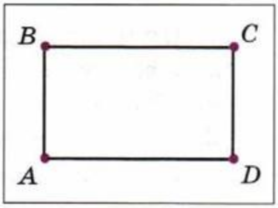


Рис. 7

Противоположные стороны прямоугольника лежат на непересекающихся прямых.

Доказательство. Рассмотрим, например, противоположные стороны AB и CD прямоугольника $ABCD$ (рис.7). Прямая AB образует прямые углы при пересечения с прямой AD, а поэтому $AB \perp AD$.

Точно так же получаем, что $CD \perp AD$.

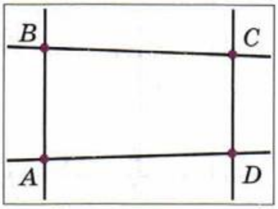


Рис. 8

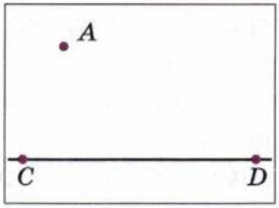


Рис. 9

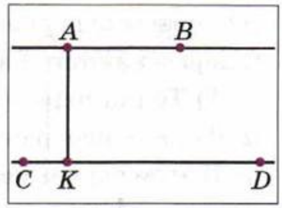


Рис. 10

Значит, прямые AB и CD перпендикулярны прямой AD, а поэтому не пересекаются.

Вопрос. На рис. 8 стороны BC и AD угла пересечены прямыми AB и CD. Как доказать, что четырёхугольник $ABCD$ не является прямоугольником?

1.4. Построение прямой, которая проходит через данную точку и не пересекает данную прямую. Пусть точка A лежит вне заданной прямой CD (рис. 9). Сначала из точки A опустим перпендикуляр AK на прямую CD. Затем построим перпендикуляр AB к прямой AK и дополним луч AB до прямой AB (рис. 10). Прямая AB не пересекается с прямой CD, в силу пункта 1.2, так как прямые AB и CD различны и перпендикулярны прямой AK.

Вопрос. Почему противоположные стороны квадрата лежат на непересекающихся прямых?

1.5. Что называют теоремой? При изучении геометрии на первый план выходят логические рассуждения, то есть доказательства. Рисунки служат для иллюстрации рассуждений. Утверждения, которые доказываются в математике, обычно называют *теоремами*, а также *леммами*, *предложениями*, *следствиями*.

Вопрос. Какие теоремы вы знаете?

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры равноотстоящих прямых.

2. Сформулируйте утверждение о прямых, перпендикулярных к некоторой прямой.

3.* Как построить прямую, не пересекающуюся с заданной прямой?

4. Какими словами обычно называют утверждение, доказываемое в математике?

5. Приведите пример следствия из некоторой теоремы.

Задачи и упражнения

1. Даны квадрат и прямая l. Постройте квадрат, равный данному, чтобы прямая l содержала:

а) одну из диагоналей квадрата;

б)** одну из сторон квадрата;

в)** середины двух противоположных сторон квадрата.

2. Даны равносторонний треугольник и прямая l. Постройте треугольник, равный данному, чтобы прямая l содержала:

а) одну из сторон треугольника;

б)* одну из высот треугольника;

в)** середины двух сторон треугольника.

3. Даны треугольник со сторонами a, b, c и прямая l. Постройте треугольник, равный данному, чтобы прямая l содержала:

а) сторону a треугольника;

б)* высоту треугольника, проведённую к стороне a.

4.* Два треугольника расположены так, что две их стороны лежат на одной прямой. Докажите, что проведённые к этим сторонам высоты треугольников либо лежат на одной прямой, либо не имеют общих точек.

5.* Постройте треугольник по двум сторонам и высоте:

а) проведённой к одной из этих сторон;

б) проведённой к третьей стороне.

6. Как показать, что диагональ прямоугольника не может быть перпендикулярна его стороне?

7.* Как показать, что диагональ ромба не может быть перпендикулярна его стороне?

8.** Докажите, что противоположные стороны ромба лежат на непересекающихся прямых.

9.** Дан ромб $ABCD$. Из вершины A проводится перпендикуляр AH к прямой CD, а из вершины A проводится перпендикуляр BF к прямой AB. Как показать, что прямые AH и BF не пересекаются?

10.** Дан ромб $ABCD$. Из вершины A проводится перпендикуляр к прямой CD, а из вершины C проводится перпендикуляр к прямой AB. Как показать, что эти перпендикуляры либо не пересекаются, либо совпадают?

11.** Прямая l не содержит вершины и пересекает две противоположные стороны прямоугольника. Докажите, что прямая l:

а) не пересекает две другие стороны прямоугольника;

б) пересекает каждую из диагоналей прямоугольника.

Тесты

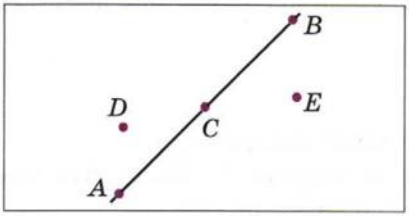


Рис. 11

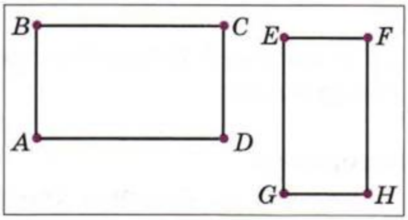


Рис. 12

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Дана прямая AB и точки C, D, E, расположенные как на рис. 11. Сколько различных перпендикуляров можно провести через C, D, и E к прямой AB?

1) ни одного; 2) три;
3) девять; 4) сколько угодно.

1.2. Даны два прямоугольника, расположенные как на рис. 12, причём $GH \perp AB$. Сколько различных пар непересекающихся прямых задают стороны этих прямоугольников?

1) ни одной; 2) четыре;
3) восемь; 4) двенадцать.

1.3. Перпендикулярно к прямой a проведена прямая b, к прямой b — прямая c, к прямой c — прямая d и к прямой d — прямая e. Все прямые не совпадают. Сколько имеется различных пар непересекающихся прямых?

1) две; 2) три; 3) четыре; 4) пять.

1.4. На рисунке имеются четырёхугольник и ещё две прямые. Какое максимальное количество различных пар непересекающихся прямых может быть на рисунке?

1) одна; 2) две; 3) три; 4) четыре.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Через стороны треугольника и одну из вершин проведены прямые. Сколько различных пар непересекающихся прямых может быть на получившемся рисунке?

1) ни одной; 2) одна; 3) две; 4) три.

2.2.** Какое число различных пар непересекающихся прямых могут образовывать прямые, содержащие стороны некоторого шестиугольника?

1) ни одной; 2) две; 3) четыре; 4) шесть.

2.3.** Какое число пар взаимно перпендикулярных сторон может быть в многоугольнике?

1) одна; 2) две; 3) три; 4) четыре.

2.4.** В некотором многоугольнике два угла — прямые. Сколько пар непересекающихся прямых могут быть среди прямых, содержащих стороны многоугольника?

1) одна; 2) две; 3) три; 4) четыре.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

2.1. Определение параллельности прямых. В геометрии очень важную роль играет понятие *параллельности.*

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

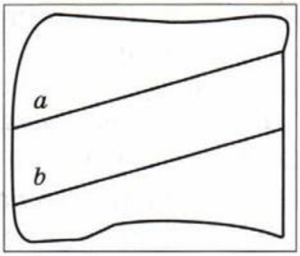


Рис. 1

Параллельность прямых обозначается с помощью знака $\|$. Например, параллельность прямых a и b на рис. 1 можно записать в виде: $a \| b$ или в виде $b \| a$.

Вопрос. Какие примеры параллельных прямых вам известны?

2.2. Аксиома параллельности. Известно (пункт 1.4), что через точку A, лежащую вне прямой CD, всегда можно провести прямую, не пересекающуюся с данной. Могут ли при этом получиться различные прямые, параллельные данной прямой? Ответ на этот вопрос даёт *аксиома параллельности.*

Через точку вне заданной прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Ответ на упомянутый вопрос был сформулирован ещё Евклидом в III веке до н.э., правда, в другой форме.

Таким образом, при построении прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую CD, всегда получается лишь одна прямая.

Вопрос. Как доказать, что два различных квадрата не могут иметь только три попарно совпадающие вершины?

2.3. Признаки параллельности прямых. В пункте 1.2 мы доказали, что две различные прямые, перпендикулярные третьей прямой, не пересекаются, то есть параллельны. Это утверждение является *признаком параллельности прямых*.

Часто для удобства прямую a считают параллельной самой себе. Это записывают в виде $a \| a$.

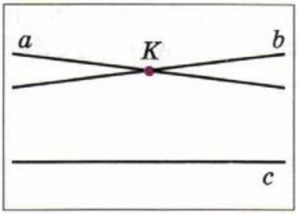


Рис. 2

Докажем ещё один признак параллельности прямых.

Если две прямые a и b параллельны прямой c, то прямые a и b параллельны между собой.

Доказательство. Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке K (рис. 2).

По условию $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Поэтому через точку K проходят две различные прямые, параллельные прямой c. Это противоречит аксиоме параллельности. Таким образом, предположение о том, что прямые a и b пересекаются, было неверным, следовательно, $a \parallel b$ и $b \parallel a$.

Вопрос. Как доказать, что если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c?

2.4. Свойства параллельных прямых.** Запишем в краткой форме свойства параллельных прямых.

Прежде всего из определения параллельных прямых вытекает свойство:

$$\text{если } a \parallel b, \text{ то } b \parallel a.$$

Далее, признак параллельности прямых из пункта 2.3 можно записать так:

$$\text{если } a \parallel b \text{ и } b \parallel c, \text{ то } a \parallel c.$$

Параллельность прямых на плоскости обладает следующими тремя основными свойствами:

1) $a \parallel a$;

2) если $a \parallel b$, то $b \parallel a$;

3) если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Вопрос. Какими свойствами обладает понятие равенства целых и дробных чисел?

2.5. Внутренние накрест лежащие углы. Пусть на плоскости заданы такие прямые AB и CD, что прямая MN пересекает AB и CD в различных точках P и Q. Говорят, что прямая MN — *секущая* для прямых AB и CD.

Секущая MN при пересечении с прямыми AB и CD образует восемь углов: $\angle APM$, $\angle MPB$, $\angle BPN$, $\angle NPA$, $\angle CQM$, $\angle MQD$, $\angle DQN$, $\angle NQC$ (рис. 3).

Углы 4 и 6 называются *внутренними накрест лежащими* углами. Углы 3 и 5 — это тоже внутренние накрест лежащие углы.

Зная величину одного из отмеченных углов при вершине P, можно найти величины любых других углов при этой вершине: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные, $\angle 1$ и $\angle 2$ дополнительные, то есть дают в сумме угол в $180°$. Аналогично по любому из отмеченных углов при вершине Q можно найти любой другой угол при этой вершине. Поэтому по известным углам, один из которых при вершине P, а другой при вершине Q, можно найти величины двух накрест лежащих углов. Например, если $\angle 1 = 75°$, $\angle 6 = 93°$, то $\angle 3 = 75°$, а $\angle 5 = 180° - \angle 6 = 87°$. В итоге внутренние накрест лежащие углы $\angle 3$ и $\angle 5$ стали известными.

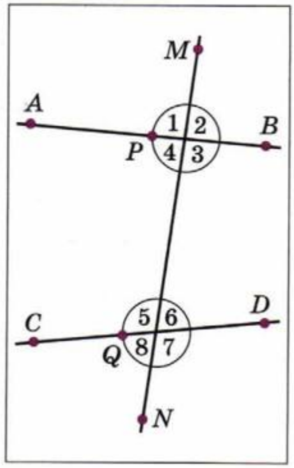


Рис. 3

Вопрос. Что можно сказать о внутренних накрест лежащих углах на рис. 3, если $\angle 1 + \angle 8 = 180°$?

2.6. О названиях углов, образованных секущей. Когда рассматривают секущую двух прямых, то кроме внутренних накрест лежащих углов выделяют и другие пары углов и дают им особые названия.

Углы 4 и 5 на рис. 3 называются *внутренними односторонними*. Точно так же внутренними односторонними являются $\angle 3$ и $\angle 6$.

Углы 1 и 5 называются *соответственными*. Точно так же соответственными являются $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$.

Углы 1 и 8, а также 2 и 7 называются *внешними односторонними*.

Углы 1 и 7, а также 2 и 8 называются *внешними накрест лежащими*.

Вопрос. Что можно сказать о внутренних накрест лежащих углах, если два соответственных угла равны?

2.7. Параллельность прямых при равенстве внутренних накрест лежащих углов. Возьмём две прямые AB и CD и их секущую MN, для которых внутренние накрест лежащие углы BPQ и CQP равны и являются острыми (рис. 4). Отметим середину K отрезка PQ и проведём перпендикуляры KH и KG к прямым AB и CD соответственно. Прямоугольные треугольники KPG и KQH имеют одинаковую гипотенузу и равные

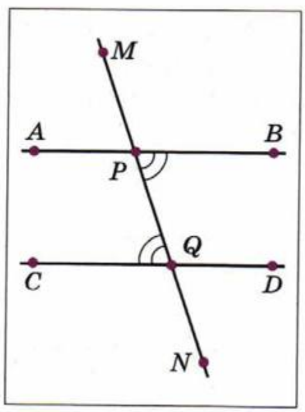


Рис. 4

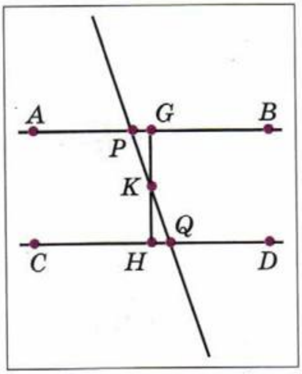


Рис. 5

острые углы. Следовательно, по признаку равенства прямоугольных треугольников они равны (рис. 5). Поэтому углы PKG и QKH равны, и $\angle HKG = \angle HKP + \angle QKG = \angle HKP + \angle QKH = \angle QKP = 180°$. Таким образом точки G, K и H лежат на одной прямой. Отсюда следует, что прямые AB и CD как перпендикуляры к одной прямой не пересекаются, то есть параллельны.

Пусть равны тупые внутренние накрест лежащие углы APQ и DQP, как на рис. 6. Тогда $\angle BPQ = 180° - \angle APQ = 180° - \angle DQP = \angle CQP$, то есть для прямых AB и CD острые внутренние накрест лежащие углы $\angle BPQ$ и $\angle CQP$ равны. Следовательно, прямые AB и CD параллельны.

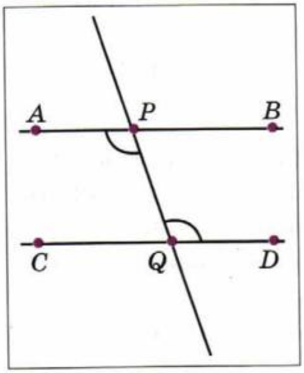


Рис. 6

Если же для секущей MN внутренние накрест лежащие углы являются прямыми, то, как уже было сказано, прямые AB параллельны как перпендикуляры к одной прямой.

В итоге получаем ещё один признак параллельности прямых.

Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то такие прямые параллельны.

Вопрос. Будут ли параллельны две прямые, при пересечении которых секущая образует равные соответственные углы?

2.8. Построение прямой, параллельной заданной. Покажем, как с помощью циркуля и линейки построить прямую, параллельную данной прямой CD и проходящую через точку P, не лежащую на прямой CD.

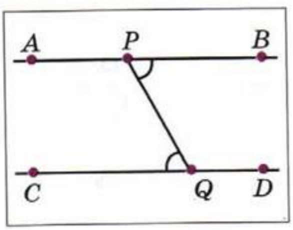


Рис. 7

Если выбрать на прямой CD точку Q, лежащую между точками C и D, провести прямую PQ и в полуплоскости с границей PQ, не содержащей точку C, отложить от точки P угол BPQ, равный углу PQC (рис. 7), то прямая BP будет параллельна прямой CD.

Построение. Радиусом PQ описываем дугу с центром в точке P, и тем же радиусом описываем дугу PR с центром в точке Q, где R — точка прямой CD. Затем из точки Q радиусом PR описываем дугу, которая пересечётся с первой дугой в точке S. Докажем, что прямая PS будет параллельна прямой CD.

Доказательство. Треугольники PQR и PQS равны по третьему признаку равенства. Равны и их соответствующие углы PQR и SPQ, то есть равны внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении прямых CD и PS секущей PQ (рис. 8). Параллельность прямых CD и PS следует из признака параллельности, установленного в пункте 2.8.

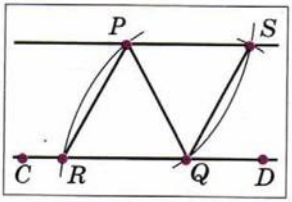


Рис. 8

Вопрос. Как следует вести построение, если отрезок PQ окажется перпендикуляром к прямой CD?

2.9. Свойство секущей параллельных прямых. Рассмотрим две параллельные прямые a и b. Проведём через точку A прямой a некоторую прямую m, не совпадающую с прямой a (рис. 9). По аксиоме параллельности прямая m не может быть параллельной прямой b, поэтому прямая m пересекает прямую в некоторой точке B.

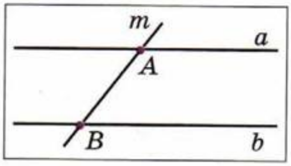


Рис. 9

Таким образом, прямая m является секущей для обеих параллельных прямых a и b.

Вопрос. Как сформулировать доказанное утверждение в виде теоремы?

2.10. Равенство внутренних накрест лежащих углов, образуемых секущей двух параллельных прямых. Аксиома параллельности и признаки параллельности прямых позволяют доказывать свойства параллельных прямых.

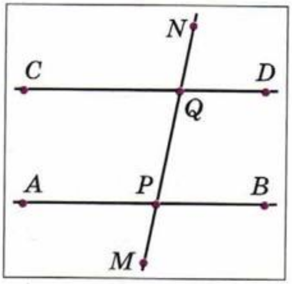


Рис. 10

Теорема. **Если две параллельные прямые пересечены секущей, то образующиеся внутренние накрест лежащие углы равны.**

Доказательство. Пусть на рис. 10 параллельные прямые AB и CD пересекаются секущей MN в точках P и Q. Проведём, как на рис. 11, через точку Q прямую C_1D_1 так, что $\angle BPQ = \angle C_1QP$. По признаку из пункта 2.4 получаем $C_1D_1 \parallel AB$. Из аксиомы параллельности следует, что прямые C_1D_1 и CD совпадают, а это значит, что и на

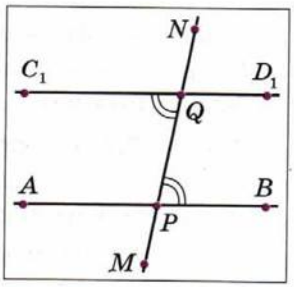


Рис. 11

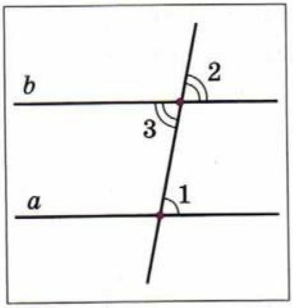


Рис. 12

рис. 10 внутренние накрест лежащие углы также равны: $\angle CQP = \angle BPQ$.

Следствие: **Если две параллельные прямые пересечены секущей, то образующиеся соответственные углы равны.**

Доказательство. Возьмём две параллельные прямые a и b. Пересечём их секущей и обозначим соответствующие углы 1 и 2 (рис. 12). Углы 3 и 1 равны как внутренние накрест лежащие, а углы 3 и 1 равны как вертикальные. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Вопрос. Какие признаки параллельности прямых вы знаете?

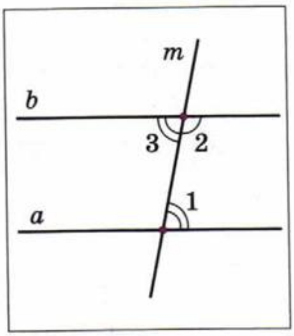


Рис. 13

2.11. Сумма внутренних односторонних углов, образуемых секущей двух параллельных прямых. Возьмём две параллельные прямые a и b. Пересечём их секущей, как на рис. 13. По теореме предыдущего пункта отмеченные углы 1 и 3 равны.

Углы 2 и 3 являются смежными, поэтому $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Значит,

$$\angle 2 = 180° - \angle 3.$$

Найдём сумму внутренних односторонних углов 1 и 2.

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + (180° - \angle 3) = 180° + (\angle 1 - \angle 3) = 180°.$$

Таким образом, приходим к следующему свойству параллельных прямых.

Теорема. **Если две параллельные прямые пересечены секущей, то образующиеся внутренние односторонние углы в сумме дают 180°.**

Вопрос. Чему равна сумма внешних односторонних углов при двух параллельных и секущей?

2.12.* Углы с соответственно параллельными сторонами. Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Аналогично: два луча называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

Рассмотрим два угла с *соответственно параллельными сторонами*. Их соответствующие стороны расположены на параллельных прямых.

Возможны три случая взаимного расположения этих двух углов.

Первый случай. Вершины двух углов совпадают, и стороны двух углов расположены по двум пересекающимся прямым. Две пересекающиеся прямые образуют четыре угла, любые два из которых являются либо вертикальными, либо смежными (рис. 14). Поэтому углы либо равны, либо в сумме составляют 180°.

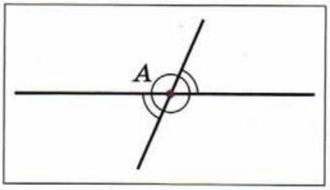


Рис. 14

Второй случай. Вершины углов A и B лежат на прямой l, содержащей по стороне каждого из углов, а две другие стороны углов лежат на параллельных прямых m и n (рис. 15).

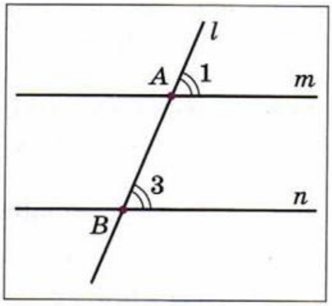


Рис. 15

Для любого угла с вершиной в точке A существует соответствующий ему угол с вершиной в точке B. Например, $\angle 1$ и $\angle 3$ на рис. 15.

Как было отмечено в первом случае, любой угол с вершиной в B и сторонами, параллельными прямым l и n, либо равен $\angle 3$, либо в сумме с ним составляет 180°. Углы 1 и 3 равны, как соответствующие углы при параллельных прямых, поэтому $\angle 1$ также либо равен углу с вершиной в точке B, либо дополняет его до 180°.

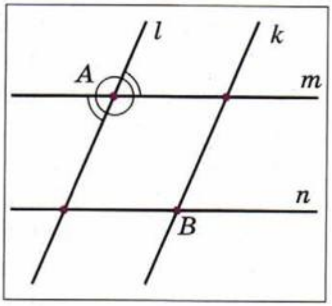


Рис. 16

Третий случай. Стороны угла A лежат на непересекающихся прямых l и m, а стороны угла B лежат на двух других прямых k и n таких, что $k \parallel l$ и $n \parallel m$ (рис. 16).

Обозначим через C точку пересечения прямых l и n. Для любого угла с вершиной в точке A существует равный ему соответствующий угол с вершиной в точке C. Пусть это углы 1 и 3 (рис. 17).

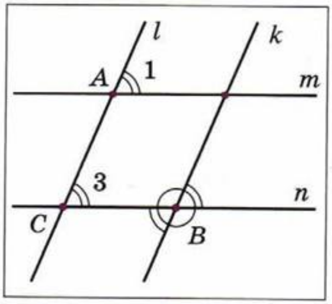


Рис. 17

Углы с вершинами в точках C и B удовлетворяют условию второго случая, и поэтому любой угол с вершиной в точке B и сторонами, параллельными прямым k и n, либо равен $\angle 3$, либо дополняет его до 180°. Так как $\angle 1 = \angle 3$, то можно сделать вывод, что любой угол с вершиной в точке B и сторонами, параллельными прямым k и n, либо равен углу с вершиной в точке A и сторонами, параллельными прямым l и m, либо дополняет его до 180°.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. **Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или составляют в сумме 180°.**

Вопрос. Две параллельные прямые пересекаются второй парой параллельных прямых. Сколько пар неразвёрнутых углов с соответственно параллельными сторонами, лежащими на этих четырёх прямых, вы можете насчитать при двух вершинах, выбранных среди точек пересечения данных прямых?

Контрольные вопросы и задания

1. Какие прямые называются параллельными?

2. Сформулируйте аксиому параллельности.

3. Какие признаки параллельности прямых вы знаете?

4. Что такое секущая для двух прямых?

5. Какие углы называют внутренними накрест лежащими?

6.** Какие углы называют внутренними односторонними углами?

7.** Какие углы называются внешними односторонними углами?

8. Какие углы называют соответственными углами?

9. Как строится прямая, не пересекающая заданную прямую?

10. Сформулируйте признак параллельности прямых:

а) используя внутренние накрест лежащие углы;

б) используя общую параллельную прямую.

11. Какие свойства параллельных прямых вы знаете?

Задачи и упражнения

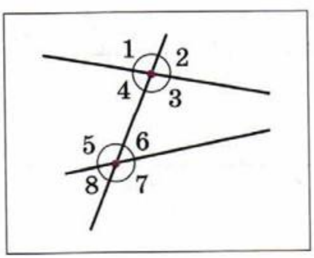


Рис. 18

1. Известно, что $\angle 1 = 102°$ и $\angle 6 = 57°$ (рис. 18). Найдите:

а) $\angle 2 + \angle 5$; б) $\angle 3 - \angle 8$; в) $\angle 4 + \angle 7$.

2. На рис. 19 прямые AB и CD пересечены секущей MN. Докажите, что прямые AB и CD параллельны, если:

а) $\angle APQ = 52°$, $\angle DQN = 128°$;

б) $\angle NPA = \angle DQM$;

в) $\angle MPB + \angle MQC = 180°$.

3. Докажите, что две прямые параллельны, если при пересечении их секущей выполняется одно из условий:

а) внешние накрест лежащие углы равны;

б) соответственные углы равны;

в) внутренние односторонние углы в сумме дают 180°;

г) внешние односторонние углы в сумме дают 180°.

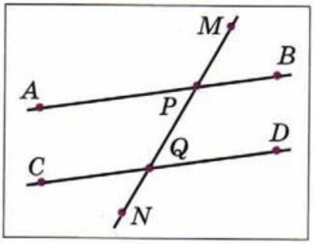


Рис. 19

4. На рис. 20 прямые AB и CD параллельны.

а) Известно, что $\angle APQ + \angle PQD = 150°$. Найдите углы $\angle BPQ$, $\angle APM$, $\angle PQC$, $\angle MPB$.

б) Известно, что $\angle BPQ - \angle PQD = 30°$. Найдите углы $\angle APQ$, $\angle CQM$, $\angle DQN$, $\angle APM$.

в)** Докажите, что биссектрисы углов APQ и DQP параллельны.

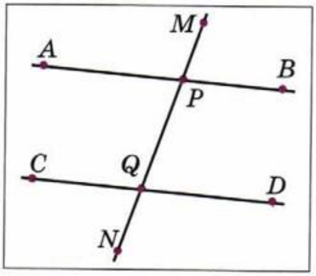


Рис. 20

5. Две пары параллельных прямых пересекаются пятой прямой так, как на рис. 21. Докажите, что

а) $\angle ABC = \angle DCB$, $\angle ACB = \angle DBC$;

б) треугольник ABC равен треугольнику DCB.

6. Две пары параллельных прямых пересекаются пятой прямой так, как на рис. 22. Известно, что $\angle CFE = 33°$, $\angle BGH = 39°$. Найдите углы GHK и CEL.

7.* На рис. 23 показано, как можно провести параллельные прямые с помощью угольника. Дайте обоснование этого способа.

8. В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла BAD и $AB = BC$. Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

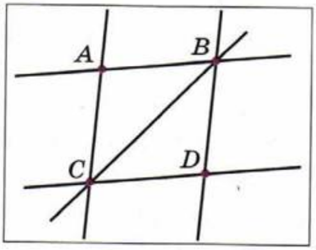


Рис. 21

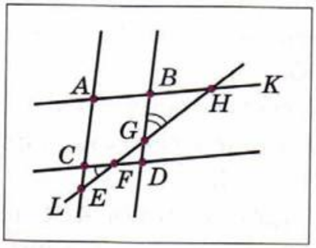


Рис. 22

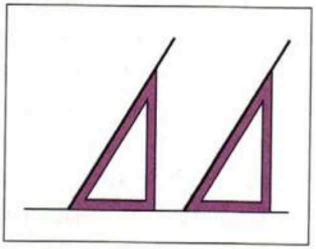


Рис. 23

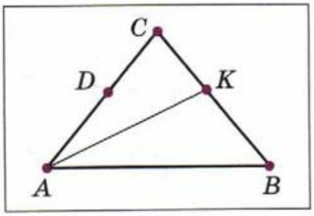


Рис. 24

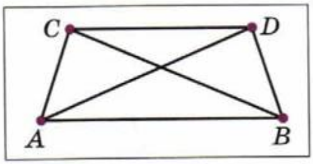


Рис. 25

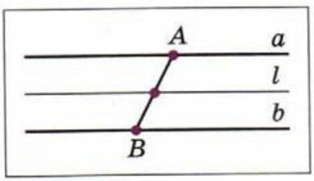


Рис. 26

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Через основание этой биссектрисы проводится прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке K. Докажите, что треугольник AKL равнобедренный.

10.* В равнобедренном треугольнике ABC на рис. 24 углы при основании равны $50°$. Точки K и D выбраны так, что $\angle KAB = 25°$ и $AD = DK$. Докажите, что прямые AB и DK параллельны.

11. Отрезки AB и CD пересекаются точке O, причём $AO = OB$, $CO = OD$. Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

12.* На рис. 25 равны отрезки AC и BD, BC и AD. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

13. В треугольнике ABC известны углы: $\angle BAC = 47°$, $\angle BCA = 39°$. Точки K и L выбраны соответственно на сторонах AB и BC так, что прямые KL и AC параллельны. Найдите сумму углов AKL и CLK.

14.* Точки A и B лежат на параллельных прямых a и b. Через середину отрезка AB проводится прямая l (рис. 26), параллельная прямым a и b. Докажите, что прямая l пересекает любой отрезок, один конец которого расположен на прямой a, а другой конец — на прямой b.

15.* Через середину стороны AB треугольника ABC параллельно стороне AC проводится прямая l. Докажите, что прямая l пересекает сторону BC.

16.* Через середину стороны AB прямоугольника $ABCD$ проводится прямая l, параллельная стороне BC. Докажите, что прямая l проходит через середину стороны CD.

17.* Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A и пересекающая продолжение стороны AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

18.* Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая продолжение биссектрисы угла A в точке D. Докажите, что $AC = CD$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. На плоскости даны три параллельные прямые. Их пересекает четвёртая прямая. Значение одного из образовавшихся углов равно $53°$. Какое ещё значение могут иметь величины углов на рисунке?

1) $106°$; 2) $26,5°$; 3) $107°$; 4) $127°$.

1.2. В треугольнике ABC углы попарно различны. Проводится прямая, параллельная AB и пересекающая две других стороны. Сколько различных пар равных углов на получившемся рисунке?

1) ни одной; 2) две; 3) четыре; 4) восемь.

1.3. В треугольнике ABC угол ABC равен $37°$. Через точку B проведена прямая BK, параллельная высоте CH треугольника. Чему равен $\angle CBK$, если он острый?

1) $74°$; 2) $53°$; 3) $43°$; 4) $47°$.

1.4. На рисунке имеется две пары параллельных прямых, причём некоторые пересекаются. Один из образовавшихся углов равен $63°$. Какое максимальное число углов, равных $117°$, может быть на рисунке?

1) ни одного; 2) два; 3) четыре; 4) восемь.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. На плоскости проведены четыре взаимно пересекающиеся прямые. Какое число различных пар вертикальных углов может при этом получиться?

1) 4; 2) 8; 3) 12; 4) 16.

2.2.* На плоскости проведены три прямые. Сколько различных пар смежных углов может при этом образоваться?

1) ни одной; 2) четыре; 3) восемь; 4) двенадцать.

2.3. Прямоугольник разделён двумя прямыми на четыре прямоугольника. Сколько различных пар параллельных прямых при этом дополнительно возникают?

1) четыре; 2) шесть; 3) восемь; 4) двенадцать.

2.4. Две параллельные прямые пересекаются третьей. Сколько различных пар равных углов можно указать на рисунке?

1) четыре; 2) шесть; 3) восемь; 4) двенадцать.

§ 3. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

3.1. Чему равна сумма углов треугольника? Покажем, как аксиома параллельности позволяет доказать следующее утверждение.

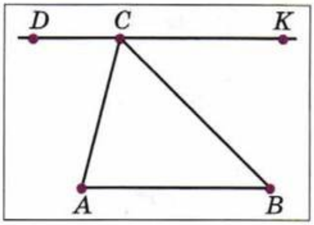


Рис. 1

Теорема. **Сумма величин углов любого треугольника равна 180°.**

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Через вершину C проведём прямую DK, параллельную стороне AB треугольника ABC (рис. 1).

Тогда углы CAB и DCA равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB, DK и секущей AC. Углы CBA и KCB также равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB, DK и секущей BC. Углы DCA, ACB и BCK в сумме составляют развёрнутый угол. Поэтому $\angle DCA + \angle ACB + \angle BCK = 180°$.

Заменим угол DCA на равный ему угол CAB и угол BCK на равный ему угол CBA. В результате получим равенство:

$$\angle CAB + \angle ACB + \angle CBA = 180°.$$

Теорема доказана.

Иногда эту теорему приводят в следующей краткой формулировке:

сумма углов любого треугольника равна 180°,

неявно предполагая, что речь идёт о величинах углов.

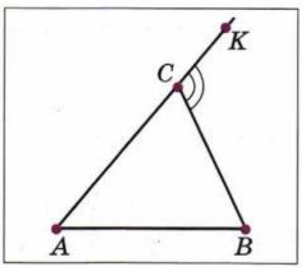


Рис. 2

Вопрос. Как доказать, что в треугольнике не может быть двух прямых углов?

3.2. Внешний угол треугольника. Угол, смежный внутреннему углу треугольника, иногда называют *внешним* углом треугольника.

На рис. 2 угол KCB является внешним углом треугольника ABC при вершине C.

В каждой вершине треугольника можно рассмотреть два его внешних угла. Например, на рис. 3 отмечены внешние углы при вершине B.

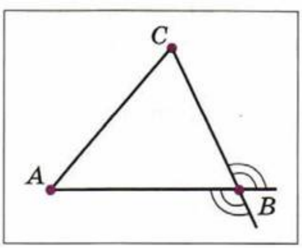


Рис. 3

Для внешних углов треугольника справедливо следующее утверждение.

Теорема. **Внешний угол треугольника равен сумме не смежных с ним внутренних углов этого треугольника.**

Доказательство. На рис. 4 рассмотрим внешний угол KAC. Тогда $\angle KAC + \angle 1 = 180°$, как сумма смежных углов, а поэтому $\angle KAC = 180° - \angle 1$.

По теореме о сумме углов треугольника

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°.$$

Следовательно,

$$\angle KAC = 180° - \angle 1 = (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) - \angle 1 = \angle 2 + \angle 3.$$

Теорема доказана.

Вопрос. Как доказать, что сумма всех внешних углов треугольника равна 720°?

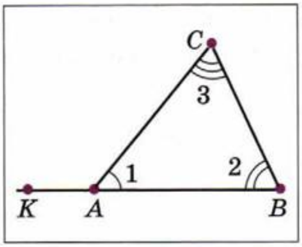


Рис. 4

3.3. Сумма внешних углов треугольника. На рис. 5 отмечены все внешние углы треугольника ABC. При каждой вершине треугольника образуется два равных между собой внешних угла. Выберем при каждой вершине по одному внешнему углу, например, так, как на рис. 6.

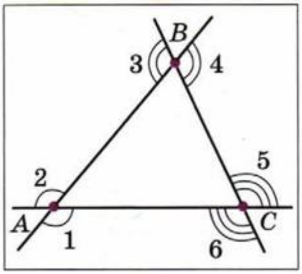


Рис. 5

Запишем равенства: $\angle 2 = 180° - \angle BAC$, $\angle 4 = 180° - \angle ABC$, $\angle 6 = 180° - \angle ACB$. Вычислим сумму:

$$\angle 2 + \angle 4 + \angle 6 =$$
$$= (180° - \angle BAC) + (180° - \angle ABC) + (180° - \angle ACB) =$$
$$= 3 \cdot 180° - (\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB) =$$
$$= 3 \cdot 180° - 180° = 2 \cdot 180° = 360°.$$

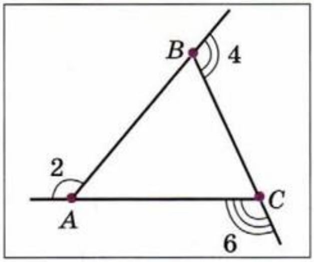


Рис. 6

В результате получаем следующее свойство внешних углов треугольника.

Сумма трёх внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Вопрос. Как доказать, что треугольник не может иметь два тупых угла?

3.4. Примеры нахождения суммы углов четырёхугольника.** Покажем, как можно найти сумму углов четырёхугольника $ABCD$, изображённого на рис. 7: $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCA + \angle CDA$.

Первый способ. По аналогии с доказательством теоремы о сумме углов треугольника проведём через вершины C и D прямые, параллельные стороне AB, и отметим углы, как на рис. 7.

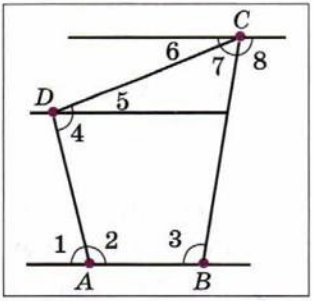


Рис. 7

Сумма S углов четырёхугольника равна сумме $\angle 3 + \angle 2 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 7$. По свойствам параллельных прямых выполняются равенства:

$$\angle 4 = \angle 1,\ \angle 5 = \angle 6,\ \angle 3 = \angle 8.$$

Поэтому

$$S = \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 7 = \angle 2 + \angle 8 + \angle 1 + \angle 6 + \angle 7 =$$
$$= (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 6 + \angle 7 + \angle 8) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

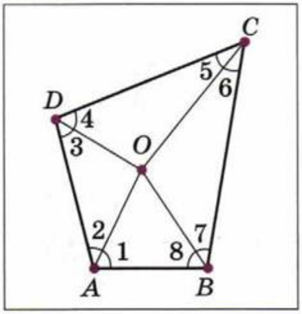


Рис. 8

Второй способ. Поставим внутри четырёхугольника точку O, как на рис. 8.

Сумма S углов четырёхугольника $ABCD$ равна сумме

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8.$$

Такую сумму можно получить, если из суммы всех углов треугольников AOB, BOC, COD, DOA вычесть сумму углов AOB, BOC, COD, DOA.

Сумма всех углов треугольников AOB, BOC, COD, DOA равна $4 \cdot 180^\circ$. Сумма углов AOB, BOC, COD, DOA равна 360°.

Таким образом,

$$S = 4 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 360^\circ.$$

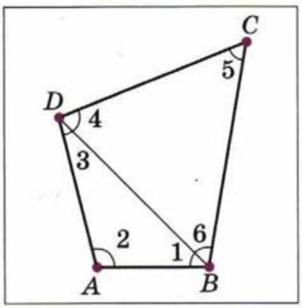


Рис. 9

Третий способ. Разобьём четырёхугольник $ABCD$ на два треугольника, как на рис. 9.

Сумма S углов четырёхугольника равна:

$$S = \angle 1 + \angle 6 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 =$$
$$= (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) =$$
$$= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

Идея разрезания многоугольника на треугольники позволяет определить внутренние углы многоугольника, а также показать, что сумма S внутренних углов любого *n-угольника* вычисляется по формуле

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Вопрос. Чему равны углы правильного пятиугольника (то есть пятиугольника, в котором все стороны равны и все углы равны)?

3.5. От «Начал» Евклида к евклидовой геометрии.** Мы изучаем евклидову геометрию плоскости. Первое дошедшее до нас обстоятельное изложение этой геометрии содержится в тринадцати книгах «Начал» древнегреческого геометра Евклида.

В «Началах» впервые показано, что некоторые утверждения можно принимать без всяких обоснований, а остальные выводить путём логических рассуждений.

Утверждения, принимаемые за основу без доказательств, называются аксиомами. В качестве аксиом обычно берут простые и естественные утверждения. Например, вне прямой можно выбрать какую-нибудь точку, через две точки проходит единственная прямая.

Точно так же не вызывают удивления первый признак равенства треугольников, возможность откладывания углов и отрезков — утверждения, которые мы принимали без доказательства.

Более сложным для восприятия является пятый постулат Евклида, который близко к тексту Евклида выглядит следующим образом:

Если на плоскости две прямые образуют с одной и той же секущей два внутренних односторонних угла, сумма которых отлична от 180°, то эти прямые не параллельны и пересекаются с той стороны от секущей, где сумма углов меньше 180°.

В действительности этот постулат равносилен аксиоме параллельности. Последователям Евклида казалось, что пятый постулат выводится из других, более очевидных утверждений. Поэтому предпринимались многочисленные попытки доказать пятый постулат. Однако все эти попытки оказались неудачными. Были выведены различные следствия из предположения, что пятый постулат неверен, но получить противоречие из этих следствий не удавалось.

Три знаменитых математика — Николай Иванович Лобачевский, Янош Бойаи и Карл Фридрих Гаусс рассматривали гипотезу, что такого противоречия может и не быть. Была построена новая, неевклидова геометрия, в которой место пятого постулата занимает другая аксиома: «Через точку вне данной прямой можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую». Все утверждения, предшествующие пятому постулату Евклида, остаются такими же, как и в привычной геометрии (например, два перпендикуляра, проведённые к одной прямой, не пересекаются). В то же время многие утверждения, доказываемые на основе пятого постулата, изменяются (например, сумма углов любого треугольника меньше 180°).

Неевклидова геометрия называется также геометрией Лобачевского.

Вопрос. Какие примеры аксиом вы знаете?

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равна сумма углов треугольника?

2. Какой угол называют внешним углом треугольника?

3. Сформулируйте свойство внешнего угла треугольника.

4. Чему равна сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине?

5.** Чему равна сумма углов четырёхугольника?

6.** Сформулируйте пятый постулат Евклида.

Задачи и упражнения

1. Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника, если угол при основании равен:

а) $45°$; б) $49°$; в) $30°$; г) $24°$; д) $72°$; е) $52°$; ё) $36°$.

2. Найдите угол при основании равнобедренного треугольника, если угол при его вершине равен:

а) $90°$; б) $60°$; в) $120°$; г) $30°$; д) $150°$; е) $72°$; ё) $95°$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом при вершине B величиной в $36°$ проведена биссектриса AL. Найдите углы треугольника: а) ALC; б) ABL.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL и BM, пересекающиеся в точке O. Найдите углы треугольников AOB, BOL, AOM, если:

а) $\angle BAC = 80°$, $\angle ABC = 60°$;

б) $\angle BAC = 30°$, $\angle ACB = 60°$;

в) $\angle ACB = 22°$, $\angle ABC = 88°$;

г)* $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$.

5. Найдите углы треугольника, если внешние углы при двух его вершинах равны $120°$ и $130°$.

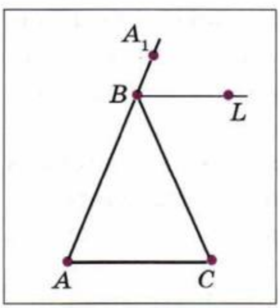


Рис. 10

6. На рис. 10 изображён равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, а BL — биссектриса внешнего угла CBA_1. Докажите, что прямая BL параллельна прямой AC.

7. В треугольнике ABC угол BAC равен $48°$, угол ABC равен $23°$. Прямая l пересекает сторону AB в точке F, сторону BC в точке G, а продолжение стороны AC в точке H, причём $\angle AHF = 37°$. Найдите угол CGF.

8. Две пары параллельных прямых пересекаются пятой прямой так, как указано на рис. 11. Известно, что $\angle CFE = 39°$, $\angle BGH = 33°$. Найдите угол CAB.

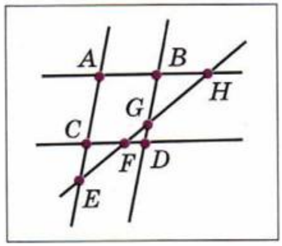


Рис. 11

9.* В треугольнике ABC проведена высота AH. Известно, что $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$. Найдите углы треугольников ABH и CAH. Рассмотрите все возможные случаи чертежа.

10.* Докажите, что в прямоугольном треугольнике с острым углом в $30°$ один катет равен половине гипотенузы.

11. Равносторонние треугольники ABC, BCD, CDE расположены как на рис. 12. Прямая l пересекает стороны BC, CD, DE в точках F, G, H соответственно, причём $\angle HAC = 21°$. Найдите угол DGH.

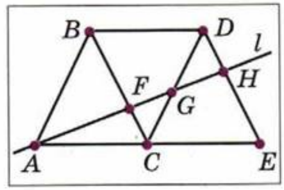


Рис. 12

12.** В четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов пересекаются так, как указано на рис. 13. Найдите углы четырёхугольника $MNKL$, если известны углы: $\angle A = 60°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 130°$, $\angle D = 110°$.

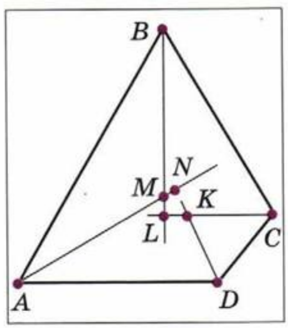


Рис. 13

13.** Точки A, B, C, D, E являются вершинами правильного пятиугольника и соединены так, что образуют пятиконечную звезду, как на рис. 14. Найдите сумму отмеченных углов.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Угол A в треугольнике ABC равен $57°31'$. Чему равна сумма углов B и C этого треугольника?

1) $131°57'$; 2) $88°00'$; 3) $202°29'$; 4) $122°29'$.

1.2. В четырёхугольнике $ABCD$ угол A равен углу B, а угол C равен углу D. Угол C равен $57°32'$. Чему равен угол B?

1) $121°28'$; 2) $141°28'$; 3) $122°28'$; 4) $142°28'$.

1.3. Какая из следующих пар углов может присутствовать в одном треугольнике?

1) $120°$ и $70°$; 2) $120°$ и $60°$;
3) $140°$ и $50°$; 4) $140°$ и $30°$.

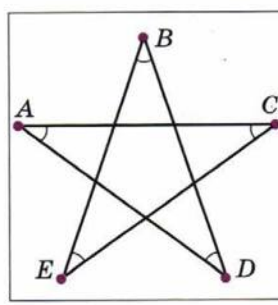


Рис. 14

1.4. В четырёхугольнике $ABCD$ при пересечении диагоналей образуется четыре угла. Один из этих углов равен 45°. Чему может быть равен один из других углов?

1) 55°; 2) 85°; 3) 105°; 4) 135°.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.** Какие из значений могут быть суммой всех внутренних углов некоторого многоугольника?

1) 120°; 2) 180°; 3) 270°; 4) 360°.

2.2. ** Какой может быть сумма внутренних углов правильного многоугольника?

1) 180°; 2) 360°; 3) 480°; 4) 540°.

2.3. Какие из наборов значений могут быть величинами углов некоторого треугольника?

1) 50°, 50°, 50°; 2) 60°, 60°, 60°; 3) 70°, 20°, 90°; 4) 170°, 6°, 4°.

2.4. Какие из пар углов являются углами некоторого остроугольного треугольника?

1) 40° и 50°; 2) 30° и 70°; 3) 40° и 91°; 4) 41° и 51°.

Глава 7

НЕРАВЕНСТВА

В этой главе напоминаются свойства числовых неравенств, вводится важное понятие равносильности неравенств, показывается, как решать линейные неравенства с одним неизвестным.

§ 1. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

1.1. Строгие неравенства. Любые два числа можно сравнить по величине. Для записи результата сравнения используются знакомые нам знаки: =, то есть «равно»; >, то есть «больше»; <, то есть «меньше».

Если известно, что число a больше числа b, то это можно записать в виде *строгого* неравенства

$$a > b$$

или также в виде *строгого* неравенства

$$b < a,$$

поскольку в этом случае число b меньше числа a.

Аналогично, если число a меньше числа b, то есть число b больше числа a, то можно применить любую из записей: $a < b$ или $b > a$.

Вопрос. Как сравнить по величине два числа -1 и 1?

1.2. Сравнение чисел с нулём. Напомним, что если $a > 0$, то число a положительно; если $a < 0$, то число a отрицательно.

Возьмём любые два положительных числа a и b, например, $a = 0{,}3$; $b = 4{,}1$. Тогда $a + b = 4{,}4$. Получаем, что сумма этих положительных чисел — положительное число.

Такое свойство выполняется для любых двух положительных чисел:

если $a > 0$ и $b > 0$, то $a + b > 0$.

Вопрос. Как показать, что сумма отрицательных чисел всегда отрицательна?

1.3. Сумма двух чисел разного знака. Заметим, что когда числа a и b разного знака, то о знаке их суммы нельзя сделать определённого вывода, не имея дополнительных сведений об этих числах.

Пример 1. Если $a = 5$, $b = -3$, то $a + b = 5 + (-3) = 5 - 3 = 2 > 0$.

Если $a = -5$, $b = 3$, то $a + b = -5 + 3 = -2 < 0$.

Если $a = -5$, $b = 5$, то $a + b = -5 + 5 = 0$.

Таким образом, сумма двух чисел разного знака может оказаться или положительной, или отрицательной, или равной нулю.

Вопрос. Какое число одновременно не отрицательно и не положительно?

1.4. Сравнение произведения чисел с нулём. Изучая произведение дробных чисел, мы установили правило знаков: произведение двух чисел одного знака положительно, а произведение двух чисел разных знаков отрицательно. Это правило можно записать в виде следующих свойств числовых неравенств:

если $a > 0$ и $b > 0$, то $a \cdot b > 0$;
если $a < 0$ и $b < 0$, то $a \cdot b > 0$;
если $a < 0$ и $b > 0$, то $a \cdot b < 0$;
если $a > 0$ и $b < 0$, то $a \cdot b < 0$.

Вопрос. Как определить знак отношения двух ненулевых чисел?

1.5. Знак квадрата чисел. Следствием рассмотренных свойств неравенств является следующее важное заключение:

квадрат любого ненулевого числа — число положительное;
нулю равен только квадрат числа нуль.

Действительно, если число a не равно нулю, то произведение $a \cdot a$ состоит из сомножителей одного знака и потому $a^2 > 0$.

Если $a^2 = 0$, то число a не является ни положительным, ни отрицательным. В то же время $0^2 = 0$.

Вопрос. Сколько вы знаете различных чисел, квадрат которых равен 400?

1.6. Сравнение чисел по знаку их разности. В 6 классе мы установили следующие важные свойства числовых неравенств:

из $a > b$ следует $a - b > 0$;
из $a - b > 0$ следует $a > b$.

Другими словами, неравенство $a > b$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $a - b > 0$.

Пример 2. Выяснить, какое из чисел: $a = 5832 + 457$ или $b = 5632 + 629$, больше другого.

Вычислим разность $a - b$.

$$(5832 + 457) - (5632 + 629) = 5832 + 457 - 5632 - 629 =$$
$$= (5832 - 5632) - (629 - 457) = 200 - 172 = 28 > 0.$$

Получили $a - b > 0$, поэтому $a > b$.

Вопрос. Какое из двух чисел: a или b, больше другого, если $a - b < 0$?

1.7. Прибавление числа к обеим частям неравенства. Для чисел a, b и c имеет место свойство:

если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Это свойство следует из п. 1.6. Действительно,

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = (a - b) + (c - c) = a - b.$$

Из неравенства $a > b$ следует, что $a - b > 0$, $(a + c) - (b + c) > 0$. Поэтому $a + c > b + c$.

Вопрос. Какое из чисел больше: $a = 5732 - 22\,457$ или $b = 5832 - 22\,457$?

1.8. Умножение на положительное число обеих частей неравенства. Для любых чисел a, b и любого положительного числа c имеет место свойство:

если $a > b$ и $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$.

Действительно, $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c$. Из неравенства $a > b$ следует, что $a - b > 0$.

Далее, ввиду п. 1.4 произведение положительных чисел положительно, поэтому $(a - b) \cdot c > 0$. Следовательно, $a \cdot c - b \cdot c > 0$ и в силу п. 1.6

$$a \cdot c > b \cdot c.$$

Вопрос. Какое из чисел больше: $a = \dfrac{1974}{1946}$ или $b = \dfrac{2006}{1946}$?

1.9. Умножение на отрицательное число обеих частей неравенства. Для любых чисел a, b и любого отрицательного числа c имеет место свойство:

если $a > b$ и $c < 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.

Действительно, $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c$. Из неравенства $a > b$ следует, что $a - b > 0$. Ввиду п. 1.4 произведение положительного числа на отрицательное — отрицательно, поэтому $(a - b) \cdot c < 0$. Следовательно, $a \cdot c - b \cdot c < 0$ и в силу п. 1.6 справедливо неравенство $a \cdot c < b \cdot c$.

Вопрос. Что получится, если обе части неравенства $25 > -36$ умножить на число 0?

1.10.* Сравнение чисел, обратных к заданным ненулевым числам. Пусть a и b — ненулевые числа, связанные, например, неравенством $a < b$. Для сравнения между собой обратных к ним чисел $\dfrac{1}{a}$ и $\dfrac{1}{b}$ можно левую и правую части исходного неравенства домножить на ненулевое число $\dfrac{1}{ab}$. В результате может получиться одно из двух неравенств:

1) если $\dfrac{1}{ab} > 0$, то $\dfrac{1}{ab} \cdot a < \dfrac{1}{ab} \cdot b$ или $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$;

2) если $\dfrac{1}{ab} < 0$, то $\dfrac{1}{ab} \cdot a > \dfrac{1}{ab} \cdot b$ или $\dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{a}$.

Вопрос. Какое из чисел: $\frac{1}{a}$ или $\frac{1}{b}$, расположено правее на числовой прямой с положительным направлением вправо, если известно, что число a расположено правее числа 0, а число b — левее числа 0?

Контрольные вопросы и задания

1. Что означают неравенства: $a > b$, $a < b$?

2. Какое число называют положительным?

3. Какое число называют отрицательным?

4. Какой знак имеет сумма положительных чисел?

5. Какой знак имеет произведение положительных чисел?

6. Когда произведение двух чисел положительно?

7. Когда произведение двух чисел отрицательно?

8. Когда отношение двух ненулевых чисел положительно?

9. Когда отношение двух ненулевых чисел отрицательно?

10. Сформулируйте свойство о прибавлении числа к обеим частям неравенства.

11. Сформулируйте свойство об умножении на положительное число обеих частей неравенства.

12. Сформулируйте свойство об умножении на отрцательное число обеих частей неравенства.

Задачи и упражнения

1. Приведите несколько примеров числовых неравенств.

2. Поставьте вместо * знак > или < так, чтобы выполнялось неравенство:

а) $1 * 2$; б) $26 * 23$; в) $161 * 272$; г) $\frac{6}{7} * \frac{3}{7}$;

д) $\frac{5}{14} * \frac{3}{8}$; е) $\frac{4}{5} * \frac{2}{3}$; ё) $4{,}1234 * 4{,}1231$.

3. Поставьте вместо * знак > или <, чтобы правильно сравнить величины:

а) 7 кг 484 г * 6 кг 926 г; б) 8 т 500 кг * 8 т 650 кг;

в) 10 км 30 м * 9 км 190 м; г) 6 мм * 5,5 мм.

4. Поставьте вместо * знак > или < так, чтобы выполнялось неравенство:

а) $-1 * -2$; б) $-5 * -6$; в) $-10 * -15$; г) $-1 * 2$;

д) $-2 * 0$; е) $-1 * 4$; ё) $\frac{-3}{4} * -\frac{2}{3}$; ж) $-\frac{5}{6} * -\frac{4}{5}$;

з) $-\frac{6}{8} * -\frac{5}{11}$; и) $-1{,}256 * -1{,}258$; й) $-2{,}1364 * -2{,}1365$.

5.* Приведите примеры чисел a и b, для которых одновременно выполняются неравенства $a^2 < b^2$ и $a > b$.

6. Для каких пар чисел, приведённых в таблице, выполняется неравенство $a > b$? В ответе перечислите верные неравенства.

a	2	−2	2	−1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{8}{12}$
b	1	−1	2	−1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{11}$	$-\frac{10}{13}$	$-\frac{8}{12}$

7. Для какого числа a неравенство $a > 0$ выполнено, если a равно:

а) 5; б) 12,6; в) $-\frac{4}{5}$; г) 0; д) $\frac{4}{21}$?

8. Для какого числа a неравенство $a < 0$ выполнено, если a равно:

а) 5; б) $\frac{4}{81}$; в) $-\frac{16}{59}$; г) 0; д) −0,128?

9. Запишите число $-a$, если a равно:

а) 10; б)1,2; в) $-\frac{4}{12}$; г) −2,56; д) 0; е) 5,321.

10. В каком случае числа a и $-a$ совпадают?

11. Приведите примеры положительного и отрицательного чисел, таких, что:

а) их сумма положительна;

б) их сумма отрицательна.

12. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{10}\right)$; б) $\left(\frac{2}{10}\right) : 2$; в) $\left(-\frac{6}{11}\right) \cdot 11$;

г) $\left(-\frac{12}{5}\right) : 12$; д) $\left(-\frac{16}{21}\right) \cdot (-4)$; е) $\left(-\frac{12}{17}\right) \cdot (-17)$.

13. Известно, что $(a-5)^2 = 0$. Чему равно a?

14. Известно, что a^2 равно 16 и a отрицательно. Найдите a.

15. Известно, что a^2 равно 81 и a положительно. Найдите a.

16.* Докажите, что при всех числовых значениях букв выполняются неравенства:

а) $a + 1 > a$; б) $2b + 3 > 2b + 1$; в) $4c + 6 > 4c + 2$; г) $x + 2 > x - 4$.

17.* Докажите, что если $a > b$, то:

а) $2a > 2b$; б) $3a > 3b$; в) $a + 1 > b + 1$; г) $2a + 1 > 2b + 1$.

18.* Докажите, что при всех числовых значениях букв выполняются неравенства:

а) $a - 1 < a + 2$; б) $2b - 4 < 2b$; в) $3c - 6 < 3c - 2$; г) $x - 4 < x$.

19.* Докажите, что если $a > 0$, то

а) $2a > 0$; б) $4a + 3 > 0$; в) $3a + 1 > 0$;

г) $\frac{1}{a} > 0$; д) $\frac{1}{a+1} > 0$; е) $\frac{1}{2a+1} > -\frac{1}{3}$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какая из указанных записей верна?

1) $\frac{21}{22} > \frac{22}{23}$; 2) $-\frac{1}{2} > -\frac{1}{4}$; 3) $\frac{57}{58} < \frac{58}{59}$; 4) $\frac{216}{32} < 6$.

1.2. Какое из указанных чисел больше $-\frac{1}{3}$, но меньше $-\frac{1}{5}$?

1) $-\frac{3}{7}$; 2) $-1 + \frac{5}{7}$; 3) $\frac{2}{9} - 1$; 4) $-\frac{2}{5}$.

1.3. Укажите верную запись:

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{5}{6}$; 2) $-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$;

3) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$; 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) < \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$.

1.4. Какая из следующих дробей является наибольшей?

1) $-\frac{7}{13}$; 2) $-\frac{4}{7}$; 3) $-\frac{4}{9}$; 4) $-\frac{6}{11}$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. При каких значениях a выполняется неравенство $2a + \frac{3}{2} < \frac{1}{a}$?

1) $a = -2$; 2) $a = -\frac{1}{2}$; 3) $a = -\frac{3}{2}$; 4) $a = \frac{1}{2}$.

2.2. Какие из указанных неравенств выполняются для любого числа a?

1) $a^2 + |a| + 1 > 0$; 2) $(a - 1)^2 > 0$;

3) $(a - 1)^2 + \frac{1}{2} > 0$; 4) $(1 - a)^2 - 1 > 0$.

2.3. Какие из указанных неравенств выполняются для любых чисел a и b?

1) $a^2 + b^2 > 1$; 2) $a^2 + b^2 - 1 > 0$;

3) $a^2 + b^2 + 1 > 0$; 4) $1 > -(a^2 + b^2)$.

2.4. Для каких из указанных точек плоскости ордината больше удвоенной абсциссы?

1) (5, 3); 2) (2, 5); 3) (5, 2); 4) (−5, 2).

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ

2.1. Неравенства с одной переменной (со знаком >). Рассмотрим два буквенных выражения, например, $A(x) = 3x - 2$ и $B(x) = -4x - 5$.

При $x = 0$ получим $A(0) = -2$, $B(0) = -5$ и $A(0) > B(0)$.

При $x = -1$ получим $A(-1) = -5$, $B(-1) = -1$ и $A(-1) < B(-1)$.

При $x = -\frac{3}{7}$ получим $A\left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{23}{7} = B\left(-\frac{3}{7}\right)$.

В результате при некотором числовом значении c для числовых выражений $A(c)$ и $B(c)$ выполняется неравенство $A(c) > B(c)$, при некотором числовом значении d выражение $A(d)$ не будет больше выражения $B(d)$.

Таким образом, для буквенных выражений $A(x)$ и $B(x)$ можно сформулировать следующую задачу: «Найти все те значения переменной величины x, при которых значение выражения $A(x)$ больше значения выражения $B(x)$».

Кратко эту задачу записывают так: «Найти все значения x, при которых $A(x) > B(x)$»; или так: «Решить неравенство $A(x) > B(x)$».

В этом случае запись $A(x) > B(x)$ называют *неравенством с одной переменной (с одним неизвестным)*.

В неравенстве $A(x) > B(x)$ выражение $A(x)$ называют левой частью неравенства, выражение $B(x)$ — правой частью неравенства.

Каждое значение c переменной x, при котором $A(c) > B(c)$, называется *корнем* неравенства $A(x) > B(x)$.

Иногда корень неравенства $A(x) > B(x)$ называют *решением* этого неравенства.

Пример 1. Рассмотрим алгебраическое неравенство $x^2 > 0$. Любое ненулевое число будет его корнем, но число 0 не является корнем этого неравенства.

Вопрос. Какие ненулевые корни неравенства $3x - 2 > -4x - 5$ вы можете указать?

2.2. Неравенства с одной переменной (со знаком <). Для буквенных выражений $C(x)$ и $D(x)$ можно сформулировать другую задачу: «Найти все те значения переменной величины x, при которых значение выражения $C(x)$ меньше значения выражения $D(x)$».

Кратко эту задачу записывают так: «Найти все значения x, при которых $C(x) < D(x)$»; или так: «Решить неравенство $C(x) < D(x)$».

И в этом случае запись $C(x) < D(x)$ также называют *неравенством с одной переменной (с одним неизвестным)*.

В неравенстве $C(x) < D(x)$ выражение $C(x)$ называют левой частью неравенства, выражение $D(x)$ — правой частью неравенства.

Каждое значение c переменной x, при котором $C(c) < D(c)$, называется корнем или решением неравенства $C(x) < D(x)$.

Неравенства $A(x) > B(x)$ и $C(x) < D(x)$ называют неравенствами *противоположного направления*, или неравенствами противоположного смысла, или неравенствами с противоположными знаками.

Числовые выражения, не содержащие буквы x, всё равно бывает удобно обозначать через $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, и так далее. Заметим, что вместо переменной x могут использоваться и другие буквы.

Если $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ — многочлены от переменной x, то неравенства $A(x) > B(x)$ и $C(x) < D(x)$ называются *алгебраическими* неравенствами от x.

Вопрос. Как объяснить, что всякий корень неравенства $A(x) > B(x)$ является корнем неравенства $B(x) < A(x)$, и обратно — всякий корень неравенства $B(x) < A(x)$ является корнем неравенства $A(x) > B(x)$?

2.3. Множество корней неравенства. Пусть задано неравенство $A(x) > B(x)$. Обозначим через M набор всех его корней. Часто M называют *множеством корней* или *множеством решений* неравенства $A(x) > B(x)$.

Если неравенство не имеет корней, то в этом случае говорят, что множество его корней является *пустым множеством*.

Решить неравенство — это одно из двух: либо найти все корни неравенства, либо доказать, что неравенство не имеет корней.

Пример 2. Решить неравенство $x > 5$.

Всякое число, большее 5, является решением этого неравенства. Число 5 и каждое из чисел, меньшее 5, не является решением неравенства $x > 5$.

Следовательно, множеством решений неравенства $x > 5$ является множество всех чисел, каждое из которых больше 5.

Вопрос. Как показать, что множество решений неравенства $0 > x^2$ является пустым множеством?

2.4. Равносильность неравенств.

Пример 3. Решить неравенство $x - 5 > 0$.

Пусть число c — решение этого неравенства, то есть $c - 5 > 0$. Прибавляя к обеим частям этого числового неравенства число 5, получаем числовое неравенство $(c - 5) + 5 > 5$ или $c > 5$. Следовательно, всякое решение c данного неравенства является числом, большим 5, то есть число c принадлежит множеству решений неравенства $x > 5$.

Обратно, покажем, что всякое число, большее 5, будет решением данного неравенства. Пусть число d больше 5, то есть $d > 5$. Прибавляя к обеим частям этого числового неравенства число -5, получаем числовое неравенство $d - 5 > 5 + (-5)$, или $d - 5 > 0$, то есть число d принадлежит множеству решений неравенства $x - 5 > 0$.

Таким образом, множество решений неравенства $x - 5 > 0$ совпадает с множеством решений неравенства $x > 5$. Иногда запись $x > 5$ используют для записи множества решений неравенства $x - 5 > 0$.

Неравенства называются равносильными, если множества корней этих неравенств совпадают.

Одним из важнейших является следующее правило, позволяющее заменить неравенство на равносильное ему неравенство противоположного направления.

Правило 1. Неравенства $A(x) > B(x)$ и $B(x) < A(x)$ равносильны.

Другими словами, всякий корень неравенства $A(x) > B(x)$ является корнем неравенства $B(x) < A(x)$, и обратно — всякий корень неравенства $B(x) < A(x)$ является корнем неравенства $A(x) > B(x)$.

Вопрос. Как показать, что неравенства $2x > 10$ и $3x > 15$ равносильны?

2.5. Свойства равносильности неравенств.** Понятие равносильности неравенств обладает свойствами, похожими на свойства равенства чисел:

1) Каждое неравенство равносильно самому себе.

2) Если первое неравенство равносильно второму, то второе неравенство равносильно первому.

3) Если первое неравенство равносильно второму, второе неравенство равносильно третьему, то первое неравенство равносильно третьему.

Эти свойства позволяют получать новые равносильные неравенства.

Вопрос. Как показать равносильность неравенств $a^3(a^2 + 1) > 0$ и $a > 0$?

2.6. Линейные неравенства. Неравенство, в котором левая и правая части являются линейными выражениями, называется *линейным* неравенством.

Например, неравенства $x + 1 > 0$, $2x > 1$, $3x - 2 > -4x - 5$, $6x + 7 > 6x + 8$ являются линейными.

Линейные неравенства решаются при помощи преобразований, использующих свойства числовых неравенств и законы сложения, умножения, вычитания, деления.

Пример 4. Решить неравенство $2x > 3$.

Пусть число c является решением данного неравенства, то есть выполняется числовое неравенство $2 \cdot c > 3$. Умножив обе части этого неравенства на положительное число $\frac{1}{2}$, получим неравенство $c > \frac{3}{2}$. Таким образом, решениями данного неравенства могут быть только числа, большие $\frac{3}{2}$.

Обратно. Возьмём произвольное число d, такое, что $d > \frac{3}{2}$. Умножив обе части этого неравенства на положительное число 2, получим неравенство $2d > 3$. Таким образом, каждое число, большее числа $\frac{3}{2}$, является решениями данного неравенства.

В результате неравенство $2x > 3$ равносильно неравенству $x > \frac{3}{2}$.

Ответ: $x > \frac{3}{2}$.

Похожими рассуждениями можно получить общее правило.

Правило 2. Пусть r — положительное число. Тогда неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $r \cdot A(x) > r \cdot B(x)$.

Заметим, что в примере 3 было показано, что неравенство $x - 5 > 0$ равносильно неравенству $x > 5$. Второе неравенство получается из первого, если к каждой из частей первого неравенства прибавить число 5.

Справедливо общее правило.

Правило 3. Пусть $D(x)$ — произвольное всюду определённое выражение. Тогда неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $A(x) + D(x) > B(x) + D(x)$.

Вопрос. Как показать, что неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $-A(x) < -B(x)$?

2.7. Умножение обеих частей неравенства на отрицательное число. Имеет место следующее правило.

Правило 4. Пусть s — отрицательное число. Тогда неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $s \cdot B(x) > s \cdot A(x)$.

Пусть число c является решением неравенства $A(x) > B(x)$, то есть $A(c) > B(c)$. Умножая обе части последнего числового неравенства на отрицательное число s, по свойству из пункта 1.9 получим числовое неравенство $s \cdot A(c) < s \cdot B(c)$ или, иначе, $s \cdot B(c) > s \cdot A(c)$. Следовательно, число c является решением неравенства $s \cdot A(x) > s \cdot B(x)$. Таким образом, всякое решение первого неравенства является решением второго неравенства.

Вопрос. Как доказать, что всякое решение второго неравенства $s \cdot B(x) > s \cdot A(x)$ является решением первого неравенства $A(x) > B(x)$?

2.8. Ещё одно правило преобразования неравенств, сохраняющее равносильность.

Пример 5. Показать, что неравенства $7x - 4 > 8x + 2$ и $(7x - 4) - (8x - 2) > 0$ равносильны.

Пусть число c является корнем первого неравенства, то есть $7c - 4 > 8c + 2$. Тогда из свойств числовых неравенств следует, что $(7c - 4) - (8c + 2) > 0$, то есть число c — корень второго неравенства.

Подобным образом можно показать, что всякий корень неравенства $(7x - 4) - (8x - 2) > 0$ является корнем неравенства $7x - 4 > 8x + 2$.

В общем случае справедливо правило.

Правило 5. Неравенства $A(x) > B(x)$ и $A(x) - B(x) > 0$ равносильны.

Вопрос. Как показать, что равносильны неравенства $A(x) < B(x)$ и $A(x) - B(x) < 0$?

2.9. Замена левой или правой части неравенства на тождественно равное выражение. Справедливы следующие два правила.

Правило 6. Пусть $A(x)$ тождественно равно $C(x)$. Тогда неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $C(x) > B(x)$.

Правило 7. Пусть $B(x)$ тождественно равно $D(x)$. Тогда неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $A(x) > D(x)$.

Применение этих правил иллюстрируется следующими примерами.

Пример 6. Неравенства $x^2 - 25 > 0$ и $(x + 5)(x - 5) > 0$ равносильны, так как $x^2 - 25$ тождественно равно $(x + 5)(x - 5)$.

Пример 7. Неравенства $x^2 - 25 < 0$ и $(x + 5)(x - 5) < 0$ равносильны по той же причине, что и неравенства в примере 6.

Вопрос. Как показать, что неравенства $0 > x^2 + 10x + 25$ и $0 > (x + 5)^2$ равносильны?

2.10. Сокращённая запись решения линейного неравенства. Чтобы получить ответ при решении неравенства, используя правила 1—7, можно записать последовательность неравенств, каждое из которых равносильно заданному неравенству.

Пример 8. Решить неравенство $1 - 4x > \frac{5}{2}$.

Запишем с пояснениями последовательность равносильных неравенств.

Прибавив к обеим частям исходного неравенства число -1, получим: $1 - 4 \cdot x - 1 > \frac{5}{2} - 1$.

Приведём подобные члены в левой и правой частях неравенства: $-4 \cdot x > \frac{3}{2}$.

Умножим на число $-\frac{1}{4}$ обе части неравенства: $\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-4) \cdot x < \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{2}$.

Заменим левую часть на тождественно равное выражение: $x < \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{2}$.

Заменим правую часть на тождественно равное выражение: $x < -\frac{3}{8}$.

Ответ: $x < -\frac{3}{8}$.

Сокращённую запись решения неравенства получим, если будем записывать только равносильные неравенства без пояснений.

Пример 9. Решить неравенство $7x - 6 > 8x + 2$.

Приведём сокращённую запись решения.

$$7x - 6 > 8x + 2;$$
$$-7x + 7x - 6 > -7x + 8x + 2;$$
$$0 \cdot x - 6 > x + 2;$$
$$-6 > x + 2;$$
$$-2 - 6 > -2 + x + 2;$$
$$-8 > x;$$
$$x < -8.$$

Ответ: $x < -8$.

Вопрос. Какие решения имеет неравенство $7x - 4 < 8x + 2$?

2.11. Линейное неравенство, не имеющее корней. Рассмотрим неравенство $0 \cdot x - 10 > -5$.

Предположим, что число c является корнем этого уравнения, то есть $0 \cdot c - 10 > -5$. Такого числового неравенства не может быть, так как при любом значении c левая часть полученного числового неравенства равна -10, что меньше числа -5. Поэтому неравенство $0 \cdot x - 10 > -5$ не имеет корней.

Вопрос. Какое множество корней имеет неравенство $2x - 10 > 2x - 5$?

2.12. Пример доказательства равносильности неравенств.**

Рассмотрим доказательство правила 3: «Пусть $D(x)$ — произвольное всюду определённое выражение. Тогда неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $A(x) + D(x) > B(x) + D(x)$».

Пусть число c является решением неравенства $A(x) > B(x)$, то есть $A(c) > B(c)$. Если прибавить к обеим частям последнего числового неравенства числовое значение $D(c)$, то по свойству из пункта 1.7 получим неравенство $A(c) + D(c) > B(c) + D(c)$. Следовательно, число c является решением неравенства $A(x) + D(x) > B(x) + D(x)$.

Обратно, если число d является решением неравенства $A(x) + D(x) > B(x) + D(x)$, то есть $A(d) + D(d) > B(d) + D(d)$, то, прибавив к обеим частям неравенства число $-D(d)$, получим неравенство $A(d) > B(d)$, также по свойству из пункта 1.7. Следовательно, число d является решением неравенства $A(x) > B(x)$.

Таким образом, всякое решение первого неравенства является решением второго неравенства, а всякое решение второго неравенства является решением первого неравенства, поэтому множества решений данных неравенств совпадают, и эти неравенства равносильны.

Вопрос. Как доказать, что если r — положительное число, то неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $r \cdot A(x) > r \cdot B(x)$?

Контрольные вопросы и задания

1. Как вы понимаете фразу «решите неравенство»?

2. Какую запись называют неравенством с одной переменной?

3. Какие неравенства называют неравенствами:

а) противоположного направления;

б) с противоположным знаком?

4. Какое число называют решением (корнем) неравенства $A(x) > B(x)$?

5. Что называют множеством решений (корней) неравенства?

6. Какие неравенства называют равносильными?

7. Какие неравенства называют линейными?

8. Какое правило о перестановке правой и левой частей неравенства вы знаете?

9.** Сформулируйте три свойства равносильности неравенств.

10. Какие правила об умножении левой и правой частей неравенства вы знаете?

11. Что произойдёт с множеством решений, если к левой и правой частям неравенства прибавить всюду определённое выражение?

12. Сформулируйте правило о замене левой или правой части неравенства на тождественно равное выражение.

13. Как связаны между собой множество решений неравенства $A(x) > B(x)$ и множество решений неравенства $A(x) - B(x) > 0$?

14.** Как доказать равносильность неравенств $A(x) > B(x)$ и $A(x) + D(x) > B(x) + D(x)$ для любого всюду определённого выражения $D(x)$?

Задачи и упражнения

1. Пусть $a > b$, $b > 2$. Докажите, что $a > 2$.

2.* Известно, что $a^2 + b^2 = 0$. Что можно сказать о числах a и b?

3. Решите неравенство:

а) $4x - 8 > 0$; б) $2x - 3 < 0$; в) $3x + 6 > 0$;

г) $7t + 5 < 0$; д) $5x + 4 > 2x + 3$.

4.** Решите неравенство:

а) $x^2 < 0$; б) $(y+2)^2 > 0$; в) $2z^2 + 3 > 0$; г) $x^2 + 4 < 0$.

5. Найдите, при каких значениях x положительно выражение:

а) $\frac{4}{10}x + 8$; б) $5 - 3x$; в) $\frac{1}{x}$; г) $3x - 7$; д)* $-x^2$.

6. Найдите, при каких значениях x отрицательно выражение:

а) $8 - 6x$; б) $2x - 5$; в) $7x + 4$;

г) $\frac{1}{x}$; д) $-x^2$; е) $\frac{x+5}{4} + 2$.

7. Решите неравенство:

а) $\frac{2x}{5} + 1 > 3x - \frac{1}{2}$; б) $\frac{x}{8} + 8 > 5 - 2x$; в) $3(x-4) + 6x > 69$;

г)** $(x-1)^2 > (x-2)^2$; д)** $(2x+3)^2 > 4x^2$.

8. Пусть $a > 0$ и $b < 0$. Положительным или отрицательным будет число?

а) $2b - 3a$; б) $2a - 4b$; в) ab^2;

г) $\frac{a-b}{b^2}$; д) $\frac{b-1}{a+1}$; е) $a^3 - (2b+3)$.

9. Что можно сказать о знаках чисел a и b, если:

а) $-4a + 2 < 0$; б) $\frac{1}{6-2a} < 0$ в) $\frac{a}{b} = -5$?

10.** Докажите, что если m и n натуральные числа и $n > m$, то:

а) $\frac{m}{n} < (m+1)(n+1)$; б) $\frac{m}{n} < \frac{m+2}{n+2}$.

11. Укажите несколько значений a, для которых верно неравенство:

а) $2a + 4 > 10$; б) $\frac{a+1}{2} > 6$.

12. При каких значениях переменной верно неравенство?

а) $2a > 2a - 5$; б) $4x - 3 < 4x$; в) $2t > -4t$;

г)* $a^2 > 0$; д)* $x^3 > 0$.

13. Умножьте обе части неравенства:

а) $6 > 5$ на -2; б) $2a > 1$ на $\frac{1}{2}$; в) $3a > b$ на $a^2 + 2$;

г) $a^2 > b^2$ на 4; д) $2a + 1 > 1$ на $-(a^2 + 1)$.

14.* Разделите обе части неравенства:

а) $-2 < -1$ на 5; б) $-2 < -1$ на -5; в) $(a^2+1)a > b(a^2+1)$ на $a^2 + 1$.

15.** Знаки чисел a и b противоположны и модули чисел не равны между собой. Докажите, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < -2$.

16. Запишите, какое неравенство получится, если из обеих частей неравенства $5 > 1$ вычесть:

а) 10; б) a; в) $-a^2$.

17. Запишите, какое неравенство получится, если к обеим частям неравенства $5 > 1$ прибавить:

а) 1; б) b; в) $x^2 - y^2$; г) $2xy$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.** Пусть b — фиксированное число. Какому из указанных неравенств равносильно неравенство $2x - b + 1 > 0$?

1) $2x - b > 1$; 2) $2x - b > -1$; 3) $2x + 1 > -b$; 4) $-b + 1 > 2x$.

1.2. Какой вид примет неравенство $2a + 3 > -b + 5$, если обе его части разделить на $-0{,}1$?

1) $-2a - 3 > b - 5$; 2) $-20a - 30 > 10b - 50$;

3) $b + 5 > -2a - 3$; 4) $10b - 50 > -20a - 30$.

1.3. Какое неравенство из перечисленных равносильно неравенству $5x < 9$?

1) $-5x < 9$; 2) $\frac{10}{3}x < 3$; 3) $-18 < -10x$; 4) $15x < 18$.

1.4. Какое неравенство из перечисленных не равносильно неравенству $2x + 3 < 5 - 3x$?

1) $5x < 2$; 2) $x < 1$; 3) $x < 0{,}4$; 4) $-0{,}4 < -x$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.** Пусть b — фиксированное число. Каким из указанных неравенств равносильно неравенство $-b + 1 > x$?

1) $1 > x + b$; 2) $x + b < 1$; 3) $x + 1 > b$; 4) $1 - x < b$.

2.2.** Пусть b — фиксированное положительное число. Каким из следующих неравенств равносильно неравенство $x - b > \frac{x}{2} + 1$?

1) $\frac{x-b}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$; 2) $2(x - b) > x + 2$;

3) $\frac{x-b}{2} > -\frac{1}{2}$; 4) $-(x - b) > -\frac{9}{2} - 1 - x + b$.

2.3. Какие из перечисленных неравенств не равносильны неравенству $x > -\frac{1}{3}$?

1) $2x > -\frac{1}{6}$; 2) $3x > 1$; 3) $3x > -1$; 4) $2x + 12 > 1 + x$.

2.4. Какие из перечисленных неравенств равносильны неравенству $2x - 7 > x + 3$?

1) $x < 10$; 2) $-x < 7 + 2x$; 3) $-x < -10$; 4) $x > 10$.

§ 3. НЕСТРОГИЕ НЕРАВЕНСТВА

3.1. Нестрогие неравенства. Наряду со строгими неравенствами рассматривают *нестрогие* неравенства, которые записывают при помощи знаков $\leq$ или $\geq$.

Неравенство $a \geq b$ выполняется, если либо $a > b$, либо $a = b$, и читается так: «a больше либо равно b».

Например, можно записать нестрогое неравенство $0 \geq 0$.

Вместо слов «нестрогое неравенство» иногда для краткости говорят слово «неравенство».

Если выполняется неравенство $a \geq 0$, то число a называют *неотрицательным.*

Неравенство $a \leq b$ выполняется, если либо $a < b$, либо $a = b$, и читается так: «a меньше либо равно b».

Например, можно записать нестрогое неравенство $5 \leq 6$.

Если выполняется неравенство $a \leq 0$, то число a называют *неположительным*.

***Вопрос*.** Когда неравенства $a \geq b$ и $a \leq b$ выполняются одновременно?

3.2. Нестрогие неравенства с одной переменной (со знаком $\geq$). По аналогии со строгими неравенствами для буквенных выражений $A(x)$ и $B(x)$ можно сформулировать задачу: «Найти все те значения переменной величины x, при которых значение выражения $A(x)$ либо больше значения $B(x)$, либо равно значению выражения $B(x)$».

Или сокращённо: «Решить неравенство $A(x) \geq B(x)$».

В этом случае запись $A(x) \geq B(x)$ называют *нестрогим неравенством с одной переменной (с одним неизвестным)*.

По аналогии со строгими неравенствами определяют левую и правую части, корень или решение нестрогого неравенства $A(x) \geq B(x)$.

***Вопрос*.** Какие решения имеет нестрогое неравенство $x^2 \geq 0$?

3.3. Нестрогие неравенства с одной переменной (со знаком $\leq$). По аналогии со строгими неравенствами для буквенных выражений $A(x)$ и $B(x)$ можно также сформулировать задачу: «Найти все те значения переменной величины x, при которых значение выражения $A(x)$ либо меньше значения $B(x)$, либо равно значению выражения $B(x)$».

Или сокращённо: «Решить неравенство $A(x) \leq B(x)$».

В этом случае запись $A(x) \leq B(x)$ также называют *нестрогим неравенством с одной переменной (с одним неизвестным)*.

По аналогии со строгими неравенствами определяют левую и правую части, корень или решение нестрогого неравенства $A(x) \leq B(x)$.

***Вопрос*.** Какие решения имеет нестрогое неравенство $x^2 \leq 0$?

3.4. Равносильность нестрогих неравенств. Пусть задано неравенство. По аналогии со строгими неравенствами набор M всех корней неравенства $A(x) \geq B(x)$ называют *множеством корней* или *множеством решений* этого неравенства.

Если неравенство не имеет корней, то в этом случае говорят, что множество его корней является *пустым множеством*.

Решить нестрогое неравенство — это одно из двух: либо найти все корни этого неравенства, либо доказать, что это неравенство не имеет корней.

Как и в случае строгих неравенств, для нестрогих неравенств определяют понятие равносильности.

Неравенства называются равносильными, если множества корней этих неравенств совпадают.

При нахождении решений нестрогого неравенства точно так же, как и в случае строгих неравенств, применяются правила преобразования неравенств, сохраняющие равносильность.

Правило 1. Неравенства $A(x) \geq B(x)$ и $B(x) \leq A(x)$ равносильны.

Правило 2. Пусть r — положительное число. Тогда неравенство $A(x) \geq B(x)$ равносильно неравенству $r \cdot A(x) \geq r \cdot B(x)$.

Правило 3. Пусть $D(x)$ — произвольное всюду определённое выражение. Тогда неравенство $A(x) \geq B(x)$ равносильно неравенству $A(x) + D(x) \geq B(x) + D(x)$.

Правило 4. Пусть s — отрицательное число. Тогда неравенство $A(x) \geq B(x)$ равносильно неравенству $s \cdot B(x) \geq s \cdot A(x)$.

Правило 5. Неравенства $A(x) \geq B(x)$ и $A(x) - B(x) \geq 0$ равносильны.

Правило 6. Пусть $A(x)$ тождественно равно $C(x)$. Тогда неравенство $A(x) \geq B(x)$ равносильно неравенству $C(x) \geq B(x)$.

Правило 7. Пусть $B(x)$ тождественно равно $D(x)$. Тогда неравенство $A(x) \geq B(x)$ равносильно неравенству$A(x) \geq D(x)$.

Используя правило 1, можно выписать аналогичные правила для нестрогих неравенств вида $B(x) \leq A(x)$.

Пример. Решить неравенство $8x - 7 \geq 9x + 1$.

Приведём сокращённую запись решения.

$$8x - 7 \geq 9x + 1;$$

$$-8x + 8x - 7 \geq -8x + 9x + 1;$$

$$0 \cdot x - 7 \geq x + 1; \qquad -7 \geq x + 1;$$

$$-1 - 7 \geq -1 + x + 1; \qquad -8 \geq x; \qquad x \leq -8.$$

Ответ: $x \leq -8$.

Вопрос. Как показать, что неравенства $A(x) \geq B(x)$ и $-A(x) \leq -B(x)$ равносильны?

3.5. Пример доказательства равносильности нестрогих неравенств.** Рассмотрим доказательство правила 3: «Пусть $D(x)$ — произвольное всюду определённое выражение. Тогда неравенство $A(x) \geq B(x)$ равносильно неравенству $A(x) + D(x) \geq B(x) + D(x)$».

Пусть число c является решением неравенства $A(x) \geq B(x)$, то есть $A(c) \geq B(c)$. Если прибавить к обеим частям последнего числового неравенства числовое значение $D(c)$, то либо по свойству из пункта 1.7 получим строгое неравенство $A(c) + D(c) > B(c) + D(c)$, либо получим равенство $A(c) + D(c) = B(c) + D(c)$. Следовательно, число c является решением нестрогого неравенства $A(x) + D(x) \geq B(x) + D(x)$.

Обратно, если число d является решением неравенства $A(x) + D(x) \geq$ $\geq B(x) + D(x)$, то есть $A(d) + D(d) \geq B(d) + D(d)$, то, прибавив к обеим частям нестрогого неравенства число $-D(d)$, получим либо строгое неравенство $A(d) > B(d)$, также по свойству из пункта 1.7, либо равенство $A(d) = B(d)$. Следовательно, число d является решением нестрогого неравенства $A(x) \geq B(x)$.

Таким образом, всякое решение первого нестрогого неравенства является решением второго нестрогого неравенства, а всякое решение второго нестрогого неравенства является решением первого нестрогого неравенства, и эти неравенства равносильны.

Вопрос. Как доказать, что если r — отрицательное число, то неравенство $A(x) \leq B(x)$ равносильно неравенству $r \cdot A(x) \geq r \cdot B(x)$?

Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях выполняется числовое неравенство $a \leq b$?

2. Какое число называют: а) неотрицательным; б) неположительным?

3. Что означают слова «решите нестрогое неравенство»?

4. Какое число называют решением (корнем) нестрогого неравенства?

5. Сравните множества решений неравенства $A(x) < B(x)$ и неравенства $A(x) \leq B(x)$.

6. Приведите примеры нестрогих равносильных неравенств.

7.** Как найти множество решений неравенства $A(x) \leq B(x)$, если известно множество решений неравенства $A(x) > B(x)$?

8. Сформулируйте правила преобразования нестрогих неравенств, сохраняющие равносильность.

Задачи и упражнения

1. Известно, что $a \geq b$, $b \geq c$ и, кроме того, $a = c$. В каком случае это возможно?

2. Докажите, что $a^2 + 1 \geq 1$ при любом a.

3. Докажите, что если $a + b \geq c$, то $a \geq c - b$. В каком случае достигается равенство?

4. Докажите, что если $a \geq b$, $c \geq 0$, то $ac \geq bc$. В каком случае будет выполняться неравенство $ac \leq bc$?

5.* Докажите, что при любых значениях переменных выполняются неравенства:

а) $(x-6)^2 \geq 0$; б) $(x+1)^2 > -1$; в) $a^2 + 4a + 2 > a(a+4)$;
г) $y(y+3) > 3y - 2$; д) $(x+2)(x+3) > (x+1)(x+4)$.

6. Известно, что $a \geq b$. Сравните числа:

а) $a + 2$, $b + 2$; б) $a - 10$, $b - 10$; в) $a^2 + a$, $b + a^2$; г) $2a + 3$, $2b + 3$.

7. Запишите неравенства, которые получатся, если из обеих частей неравенства $2a + 4 \geq 3b - 3$ вычесть:

а) 4; б) $3b - 3$; в) $2a$; г) $3b$; д) b; е) $2a + 4$; ё) -3.

8.* Докажите, что при любых a и b выполняется неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$. В каком случае достигается равенство?

9.** Докажите, что если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geq 2$. В каком случае достигается равенство?

10.** Докажите, что $4x + \frac{1}{x} \geq 4$ при $x > 0$, но $4x + \frac{1}{x} \leq -4$ при $x < 0$.

11. ** Пусть a — фиксированное число. Решите неравенство от неизвестного x:

а) $x + 3a \geq a$; б) $6x - a \leq 4a$; в) $5x + a^2 \geq 2a - x - 1$.

12. В бассейне объёмом 100 м^3 налито 30 м^3 воды. Каждый час по трубе в бассейн втекает 3 м^3 воды. Наполнится ли бассейн полностью:

а) через 20 ч; б) через 24 ч?

13. В бассейне объёмом 30 м^3 налито 20 м^3 воды. Каждый час по одной трубе в бассейн втекает 3 м^3 воды, а из другой вытекает 2 м^3. Наполнится ли бассейн полностью:

а) через 9 ч; б) через 11 ч?

14. Ученик идёт со скоростью 5 км/ч. Расстояние от дома до школы 1 км. Успеет ли ученик дойти от дома до школы:

а) за 5 мин; б) за 10 мин; в) за 14 мин?

15. Решите неравенство:

а) $2x - 9{,}9 > 0$; б) $2x - 9{,}9 < 0$; в) $2x - 9{,}9 \geq 0$; г) $2x - 9{,}9 \leq 0$.

Сравните полученные множества решений.

16.* Найдите, при каких значениях x можно вычислить значение выражения:

а) $\dfrac{1}{4\frac{1}{2}x - 9{,}9}$; б) $\dfrac{1}{5{,}5x - 99}$; в) $\dfrac{1}{3{,}6x - 14 \cdot \frac{2}{5}}$.

17. Решите неравенство:

а) $7{,}4x - 8 - (-5{,}6x - (-2{,}4 + 5) - 11{,}9) > 0$;

б) $1{,}2 + 0{,}4x - (7 - 3{,}2x) \cdot 5 + 2{,}9(3 - x) \le 0$;

в) $4(3(2(x - 1) + 1) + 2) + 3 \ge 0$;

г)* $(x - 1)(x - 1)(x - 3) \le 0$;

д) $(x + 5{,}2)(x + 3{,}1) - (x - 4{,}3)(x + 0{,}6) \le 0$.

18.** Решите неравенство:

а) $|4x - 1| \ge 7$; б) $|4x - 1| \le 7$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какому неравенству равносильно неравенство $(2x + 1)(x + 3) \ge (2x + 3)(x - 1)$?

1) $3x \ge 2x - 1$; 2) $4x^2 + 5x + 3 \ge 0$; 3) $6x - 6 > 0$; 4) $x > -1$.

1.2. Какое выражение нужно вычесть из неравенства $2x + 5 > 3x - 7$ справа и слева, чтобы получить неравенство $12 > x$?

1) $3x - 7$; 2) $2x + 5$; 3) $3x - 5$; 4) $2x - 7$.

1.3. Для какого из следующих неравенств $x \ge \frac{7}{3}$ является множеством решений?

1) $\frac{x}{2} \ge 1$; 2) $7x + 1 \ge 5x + 8$;

3) $-x + 1 \ge x - 1$; 4) $5x - 2 \ge 5 + 2x$.

1.4. Для какого из следующих неравенств $x < \frac{2}{5}$ не является множеством решений?

1) $2x - 4 < -2 - 3x$; 2) $5x + 2 < x + 4$;

3) $\frac{x}{2} + 3 < -\frac{x}{2} + \frac{17}{5}$; 4) $\frac{x}{3} < \frac{12}{90}$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Пусть $a < b$, $b < c$. Какие из приведённых неравенств выполняются всегда:

1) $a + b < 2c$; 2) $a + c > b$; 3) $-c < -a$; 4) $2b \le a + c$.

2.2.** Какие из неравенств всегда равносильны неравенству $A(x) \ge B(x) + 1$?

1) $2 - A(x) \le 1 - B(x)$; 2) $A(x) - 1 \ge B(x) - 2$;

3) $2A(x) + 1 \ge 2B(x) + 3$; 4) $1 - A(x) \le 2 - B(x)$.

2.3. Для каких из указанных неравенств $x \le -\frac{1}{2}$ является множеством решений?

1) $2x \ge -1$; 2) $-2x \le 1$; 3) $-1 \ge -2x$; 4) $2x - 3 \le x - \frac{7}{2}$.

2.4. Какие неравенства из перечисленных не равносильны неравенству $7x - 3 > 3 - 3x$?

1) $x > \frac{1}{4}$; 2) $-(3x - 2) > 7x - 3$;

3) $8x - 4 > 1 - 2x$; 4) $4x > 5 - 6x$.

§ 4. ПРОМЕЖУТКИ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ

4.1. Понятие числового множества. Разбирая примеры на решение линейных неравенств, можно было видеть, что ответом является *множество* чисел.

Не вводя общего понятия множества, будем называть этим словом произвольный набор чисел, а также произвольный набор точек числовой прямой. Например, можно говорить о множестве всех целых чисел, о множестве всех точек числовой прямой с целыми положительными координатами, о множестве чисел x, удовлетворяющих равенству $|x| = 4$, о множестве всех решений линейного неравенства.

Вопрос. Как иначе можно назвать множество всех целых положительных чисел?

4.2. Открытый числовой луч вида $(-\infty; a)$. Рассмотрим на числовой прямой луч, направленный в отрицательную сторону, с началом в точке $-\frac{3}{2}$. Если удалить его начало, то останутся точки, координата каждой из которых меньше $-\frac{3}{2}$ (рис. 1). Множество решений неравенства $x < -\frac{3}{2}$ называют *открытым числовым лучом* и обозначают $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. Значок «$-\infty$» читается как «минус бесконечность» и употребляется как символ, указывающий на неограниченное продолжение вдоль числовой оси в отрицательном направлении.

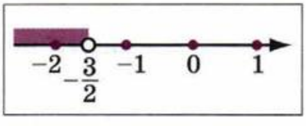


Рис. 1

Для любого числа a множество решений неравенства $x < a$ называется открытым числовым лучом и обозначается $(-\infty; a)$.

Вопрос. Как на числовой оси расположен открытый числовой луч $(-\infty; 10)$?

4.3. Замкнутый числовой луч вида $(-\infty; a]$. Рассмотрим на числовой прямой луч, направленный в отрицательную сторону, с началом в точке $-\frac{3}{2}$. Координата каждой его точки меньше либо равна $-\frac{3}{2}$ (рис. 2). Множество решений неравенства $x \le -\frac{3}{2}$ называют *замкнутым числовым лучом* и обозначают $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$.

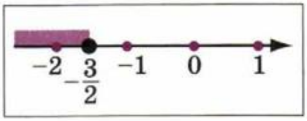


Рис. 2

Для любого числа a множество решений неравенства $x \le a$ называется замкнутым числовым лучом и обозначается $(-\infty; a]$.

Вопрос. Как на числовой прямой расположен замкнутый числовой луч $(-\infty; 10^6]$?

4.4. Замкнутый числовой луч вида $[a; +\infty)$. Рассмотрим на числовой прямой луч, направленный в положительную сторону, с началом в точке -2. Координата каждой его точки больше либо равна -2 (рис. 3). Множество решений неравенства $x \ge -2$ называют *замкнутым числовым лучом* и обозначают $[-2; +\infty)$.

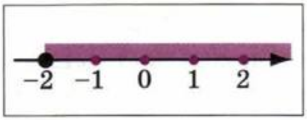


Рис. 3

Для любого числа a множество решений неравенства $x \ge a$ называется замкнутым числовым лучом и обозначается $[a; +\infty)$.

Значок «$+\infty$» читается как «плюс бесконечность» и употребляется как символ, указывающий на неограниченное продолжение вдоль числовой оси в положительном направлении.

Иногда, как и для положительных чисел, знак «+» в обозначении «$+\infty$» опускают. Поэтому луч $[-2; +\infty)$ можно обозначить $[-2; \infty)$.

Вопрос. Какой замкнутый числовой луч является множеством решений неравенства $-2x \le -8$?

4.5. Открытый числовой луч вида $(a; \infty)$. Рассмотрим на числовой прямой луч, направленный в положительную сторону, с началом в точке -2. Если удалить его начало, то останутся точки, координата каждой из которых больше -2 (рис. 4). Множество решений неравенства $x > -2$ называют *открытым числовым лучом* и обозначают $(-2; +\infty)$ или $(-2; \infty)$.

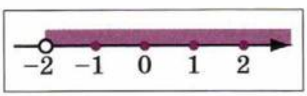


Рис. 4

Для любого числа a множество решений неравенства $x > a$ называется открытым числовым лучом и обозначается $(a; +\infty)$ или $(a; \infty)$.

Вопрос. Чем отличается промежуток $(-2;\infty)$ от промежутка $[-2;\infty)$?

4.6. Промежутки числовой прямой. Рассмотренные в пунктах 4.2—4.5 числовые лучи иногда называют *промежутками числовой прямой*. Всю числовую прямую также считают промежутком и обозначают $(-\infty;\infty)$.

Рассматривают также и другие промежутки.

Возьмём теперь два числа, например, 2 и 3.

Через $[2;3]$ обозначим множество всех чисел x, для которых одновременно выполняются неравенства $2 \le x$ и $x \le 3$. Этот промежуток содержит число 2, число 3 и все числа, расположенные между числами 2 и 3.

Через $[2;3)$ обозначим множество всех чисел x, для которых одновременно выполняются неравенства $2 \le x$ и $x < 3$. Этот промежуток содержит число 2 и все числа, расположенные между числами 2 и 3.

Через $(2;3]$ обозначим множество всех чисел x, для которых одновременно выполняются неравенства $2 < x$ и $x \le 3$. Этот промежуток содержит число 3 и все числа, расположенные между числами 2 и 3.

Через $(2;3)$ обозначим множество всех чисел x, для которых одновременно выполняются неравенства $2 < x$ и $x < 3$. Этот промежуток содержит все числа, расположенные между числами 2 и 3.

Аналогично для чисел a и b, таких, что $a < b$, можно рассматривать промежутки $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $[a;b]$.

Вопрос. Для какого линейного неравенства множество решений совпадает с промежутком $(-\infty;\infty)$?

Контрольные вопросы и задания

1. Какие примеры числовых множеств вы знаете?

2. Какие примеры множеств точек на числовой оси вы знаете?

3. Какого вида может быть промежуток?

4. Как обозначаются промежутки, неограниченно продолженные в отрицательном направлении?

5. Как обозначаются промежутки, неограниченно продолженные в положительном направлении?

6. Чем отличается промежуток $[a;\infty)$ от промежутка $(a;\infty)$?

7. Как обозначается числовая прямая в виде промежутка?

Задачи и упражнения

1. Изобразите на числовой прямой множество решений неравенства и запишите обозначение соответствующего промежутка:

а) $5x + 2 < 4x - 1$; б) $5 - 2x \le 1 - 3x$;

в) $3{,}2x - 7{,}3 > 5{,}6x - 2{,}5$; г) $0{,}03x + 1{,}1 \ge 0{,}3x + 11$;

д)* $(x - 1)(x - 2) \le (x - 3)(x - 4)$.

2. Изобразите на числовой прямой множество решений неравенства и запишите обозначение соответствующего промежутка:

а) $7x - 3 > 3x - 5$; б) $2{,}7 - 5{,}3x \ge 5{,}4 - 7{,}1x$;

в) $6{,}4x - 1{,}7 < 6{,}6x - 2{,}7$; г) $10{,}8 + 28{,}4x \ge 23{,}8 + 24{,}5x$.

3.** Решите неравенство:

а) $|x| > x$; б) $|x| \ge x$; в) $|x| \le -x$;

г) $|x - 1| + 1 \le x$; д) $|x + 2| \ge |x - 2|$.

4.* Найдите общие точки промежутков:

а) $(-\infty; 4)$ и $(-\infty; 3]$; б) $(-\infty; 7{,}2]$ и $(-\infty; 4{,}3)$;

в) $(5; +\infty)$ и $(2{,}6; +\infty)$; г) $[-8; \infty)$ и $(-9; \infty)$.

5.** Найдите общие точки промежутков:

а) $(-\infty; a]$ и $(-\infty; 2a]$ в зависимости от a;

б) $(-\infty; a]$ и $(-\infty; a^2]$ в зависимости от a.

6.* Решите неравенство:

а) $mx \le n$ при $m = 0$, $n = 0$; б) $px < q$ при $p = 0$, $q = 0$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Для какого из неравенств промежуток $(-\infty; 2)$ является множеством всех решений?

1) $2x + 1 < 3x + 3$; 2) $-1 + x < 2x + 3$;

3) $-2x + 1 < 3x + 3$; 4) $3x + 1 < 2x + 3$.

1.2. Для какого из неравенств промежуток $(3; \infty)$ не является множеством всех решений?

1) $2x + 1 < 3x - 2$; 2) $7x + 9 < 5x + 3$;

3) $4x + 5 < 5x + 2$; 4) $x + 6 < 2x + 3$.

1.3. В какой из указанных промежутков входит $(-2;3)$?

1) $(-\infty; -2)$; 2) $(3; \infty)$; 3) $(-2; \infty)$; 4) $(-\infty; 2)$.

1.4. Какой из указанных промежутков содержит все решения неравенства $5x + 2 \ge 12 - 5x$?

1) $(1; \infty)$; 2) $(-5; \infty)$; 3) $(5; \infty)$; 4) $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Для каких из перечисленных неравенств любое число является решением?

1) $3x + 1 \le 3x + 2$; 2) $5x - 1 \le 5x - 2$;

3) $0 \cdot x \le 0 \cdot x$; 4) $2x + 1 < 3x - 1$.

2.2. Какие из указанных промежутков содержат множество решений неравенства $2x < 5$?

1) $\left(\frac{5}{2}; \infty\right)$; 2) $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$; 3) $(-\infty; 9)$; 4) $(-9; \infty)$.

2.3. Решения каких из указанных неравенств входят в промежуток $(-\infty; -5)$?

1) $2x + 3 < 4x - 9$; 2) $3x + 2 < 4x - 9$;

3) $2 - 5x < -(3 + 6x)$; 4) $3x < -15$.

2.4. Для каких из указанных неравенств все решения не входят в промежуток $(-5; \infty)$?

1) $2x + 3 < x - 9$; 2) $2x + 3 < 3x - 1$;

3) $12x + 18 < 18x - 6$; 4) $x + 2 < 3x - 1$.

§ 5. ПОЧЛЕННОЕ СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

5.1. Почленное сложение и умножение неравенств. *Почленной суммой* двух равенств $a = b$ и $c = d$ называется новое равенство $a + c = b + d$, в правой части которого стоит сумма правых, а в левой — сумма левых частей исходных равенств.

Аналогично определяется почленное умножение равенств: *почленным произведением* двух равенств $a = b$ и $c = d$ называется новое равенство $a \cdot c = b \cdot d$.

Итак, два равенства можно почленно сложить или перемножить, и при этом снова получаются равенства. Спрашивается, в какой степени это утверждение распространяется на числовые неравенства?

Оказывается, что здесь имеются существенные различия.

Пример 1. Рассмотрим два неравенства $1 < 2$ и $-3 < -2$. Если их почленно сложить, то получится неравенство $-2 < 0$.

Пример 2. Сумма чисел разных знаков может быть отрицательной, положительной или нулём:

1) $-3 < 0$; $2 > 0$ и $-3 + 2 = -1 < 0$;

2) $-3 < 0$; $5 > 0$ и $-3 + 5 = 2 > 0$;

3) $-5 < 0$; $5 > 0$ и $-5 + 5 = 0$.

Пример 3. Почленное произведение неравенств $1 < 2$ и $-3 < -2$ приводит к неверной записи $-3 < -4$.

Примеры показывают, что сложение и умножение неравенств следует выполнять с осторожностью.

Вопрос. Что может получиться при возведении в квадрат обеих частей числового неравенства?

5.2. Транзитивность неравенств. Одним из свойств, используемых при доказательстве неравенств, является *транзитивность* неравенств: если из трёх чисел первое число больше второго числа, а второе число больше третьего числа, то первое число больше третьего числа. Кратко свойство транзитивности неравенств можно записать так:

Для любых чисел a, b и c, если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Действительно, из неравенства $a > b$ следует, что $a - b > 0$, из неравенства $b > c$ следует, что $b - c > 0$. Значит, числа $a - b$ и $b - c$ положительны, поэтому их сумма $a - c$ положительна и $a > c$.

Аналогичное свойство выполняется для нестрогих неравенств.

Для любых чисел a, b и c, если $a \geq b$ и $b \geq c$, то $a \geq c$.

Вопрос. Как доказать, что если $a \geq b$ и $b > c$, то $a > c$?

5.3. Сумма неравенств одинакового направления. Справедливо следующее свойство:

Сумма строгих неравенств одинакового направления (одинакового смысла) является строгим неравенством того же направления.

Пусть $a > b$ и $c > d$. Прибавив к обеим частям первого неравенства число c, к обеим частям второго неравенства число b, получим два неравенства: $a + c > b + c$, $b + c > b + d$. Из транзитивности неравенств следует, что $a + c > b + d$.

Эти рассуждения переносятся на случай нестрогих неравенств одинакового направления, поэтому справедливо свойство:

Сумма нестрогих неравенств одинакового направления (одинакового смысла) является нестрогим неравенством того же направления.

Пример 4. Для любых чисел a, b и c из неравенств $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $a^2 + c^2 \geq 2ac$ после сложения левых и правых частей этих неравенств получаем неравенство $a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + a^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$ или $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac)$. Поэтому для любых чисел a, b и c выполняется неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Вопрос. Как доказать, что из неравенства $(a - b)^2 \geq 0$ следует неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$?

5.4.* Произведение неравенств одинакового направления. В примере 3 показано, что при почленном умножении двух числовых неравенств одного направления может получиться неверная запись. Заметим, что в этом примере части неравенств были как положительны, так и отрицательны.

Справедливо следующее важное свойство.

Если левые и правые части неравенств положительны, то почленное произведение неравенств одного направления является неравенством того же направления.

Доказательство. Пусть числа a, b, c, d положительны и $a \geq b$, $c \geq d$. Так как $c > 0$, то из неравенства $a \geq b$ следует, что $ac \geq bc$. Так как $b > 0$, то из неравенства $c \geq d$ следует, что $bc \geq bd$. По свойству транзитивности из неравенств $ac \geq bc$, $bc \geq bd$ следует неравенство $ac \geq bd$.

Кратко доказанное свойство можно записать так.

Для любых положительных чисел a, b, c и d, если $a \geq b$ и $c \geq d$, то $ac \geq bd$.

Пример 5. Пусть $a > 1$. В этом случае для любого натурального числа n выполняется неравенство $a^n > 1$.

Запишем два неравенства $a > 1$ и $a > 1$. Почленно перемножив их, получим $a^2 > 1$.

Запишем после этого два неравенства $a^2 > 1$ и $a > 1$. Почленно перемножив их, получим $a^3 > 1$.

Продолжая этот процесс шаг за шагом, на k-м шаге, почленно умножив части неравенства $a^k > 1$ на части неравенства $a > 1$, придём к неравенству $a^{k+1} > 1$. Таким образом, для любого натурального числа n можно получить неравенство $a^n > 1$.

Вопрос. Как доказать, что если $a > b \geq 0$, то $a^n > b^n$ при любом натуральном n?

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое почленное сложение неравенств?

2. Что такое почленное умножение неравенств?

3. Сформулируйте свойство транзитивности строгих неравенств.

4. Сформулируйте свойство транзитивности нестрогих неравенств.

5. К какому результату приводит сложение двух строгих неравенств одного направления?

6. К какому результату приводит сложение двух нестрогих неравенств одного направления?

7.** Сформулируйте утверждение о почленном умножении двух неравенств одного направления с положительными частями неравенств.

8.** Как доказать, что если число a больше 1, то любая натуральная степень числа a больше 1?

Задачи и упражнения

1. Приведите пример двух неравенств противоположного направления, почленное сложение которых приводит к неверному результату.

2. Приведите пример двух неравенств одинакового направления, почленное умножение которых приводит к неверному результату.

3.** Приведите пример двух неравенств, почленное деление которых приводит к неверному результату.

4.** Докажите, что:

а) если $a > 1$, то $a > \frac{1}{a}$; б) если $-1 < a < 0$, то $a > \frac{1}{a}$;

в) если $0 < a < 1$, то $a < \frac{1}{a}$; г) если $a < -1$, то $a < \frac{1}{a}$.

5.** Докажите, что если $a < b < 0$, то:

а) $a^2 > b^2$; б) $a^3 < b^3$; в) $a^4 > b^4$;

г) $a^{2012} > b^{2012}$; д) $a^{2013} > b^{2013}$.

6. Докажите, что если $a > 4$, $b > 5$, то:

а) $3a + 4b > 32$; б)* $ab + 6 > 26$; в)* $a^2 + b^2 > 41$; г)** $5a + 2b^2 > 69$.

7.** Докажите, что если $a > b$, $b > 0$ и $ab = 1$, то $a + b \geq 2$.

8.** Пусть $a > b > 0$. Докажите, что:

а) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; б) $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$; в) $\frac{1}{a^n} < \frac{1}{b^n}$, где n — натуральное число.

9. Пусть $a > 1$. Докажите, что:

а) $a^2 > a$; б)* $a^3 > a$; в)** $a^n > a$, где n — натуральное число, большее 1.

10. Пусть $0 < a \leq 1$. Докажите, что:

а)* $a^2 \leq a$; б)* $a^3 \leq a$; в)** $a^n \leq a$, где n — натуральное число.

В каком случае получается равенство?

11.** Докажите, что если $a + b = 1$, то $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

В каком случае в неравенстве достигается равенство?

12.** Докажите, что для любых положительных чисел a и b верно неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое значение числа a нужно взять, чтобы неравенство $8x - 3 > 3x + 2$ было равносильно неравенству $3x + 2 > ax + 7$?

1) $a = 5$; 2) $a = 2$; 3) $a = -5$; 4) $a = -2$.

1.2. Какое из указанных чисел x является наименьшим целым числом, которое удовлетворяет неравенству $-19 > -5x$?

1) $x = -1$; 2) $x = 3$; 3) $x = 4$; 4) $x = 6$.

1.3. Какое из чисел одновременно удовлетворяет неравенствам $3x + 2 > 5x - 3$ и $2x + 2 > -3x + 4$?

1) -2; 2) 5; 3) -1; 4) 2.

1.4. Пусть $a + b > c + d$ и $e + f < g + h$. Какое из следующих неравенств можно получить, применяя правило почленного сложения неравенств одинакового направления?

1) $b + g + h + a > c + d + e$; 2) $f + d + e + c < h + g + b + a$;
3) $(a + b)(e + f) > (c + d)(g + h)$; 4) $2(a + b) > c + d + e + f$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из чисел одновременно удовлетворяют неравенствам $3x + 7 > 2x - 3$ и $21x + 5 < 19x + 1$?

1) 5; 2) -5; 3) 3; 4) -3.

2.2.** Множество решений каких из перечисленных неравенств одновременно содержит множество решений неравенства $2x > x + 5$ и множество решений неравенства $3x < x + 7$?

1) $5x < 2x + 12$; 2) $3x + 7 > 4x + 5$;
3) $5x + 10 < 5x + 7$; 4) $(x + 6)(2 + x) < (x + 4)^2$.

2.3.** Для каких из перечисленных неравенств любое его решение a удовлетворяет неравенству $|a| > 2$?

1) $x^2 > 4$; 2) $3 > 2x - 5$;
3) $2x^2 + 1 \geq x^2 + 5$; 4) $x^2 + 6 > 22$.

2.4. Какие из приведённых утверждений не выполняются при некоторых значениях чисел a, b и c?

1) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac < bc$; 2) если $a > b$, то $-2b < -2a$;
3) если $a > b$ и $b > 0$, то $ab < b^2$; 4) если $a > b$, то $a^2 > b^2$.

Глава 8

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

В этой главе вы узнаете свойства и признаки параллелограмма, научитесь вычислять площадь параллелограмма, познакомитесь с центральной симметрией фигур на плоскости.

§ 1. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ЕГО СВОЙСТВА

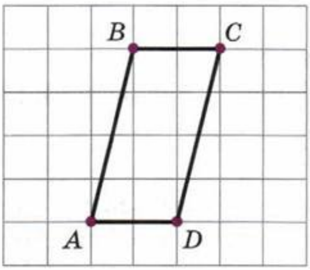


Рис. 1

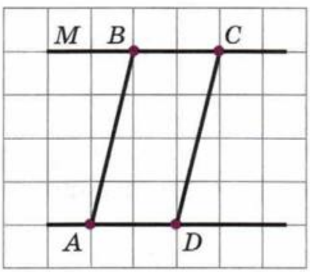


Рис. 2

1.1. Пример параллелограмма. В 5 классе, описывая различные виды четырёхугольников, мы сказали, что параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны равны.

У параллелограмма $ABCD$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги на рис. 1 равны стороны AB и CD, стороны AD и BC, углы BAD и BCD, углы ABC и ADC.

Рассмотрим прямые AD и BC, проходящие через противоположные стороны параллелограмма, и точку M на продолжении стороны BC (рис. 2). Углы MBA и BAD равны и являются внутренними накрест лежащими, образованными секущей AB. Отсюда, по признаку параллельности прямых, заключаем, что $AD \parallel BC$. Аналогично устанавливается параллельность прямых AB и CD.

Таким образом, противоположные стороны данного параллелограмма попарно параллельны.

Вопрос. Как из свойств клетчатой бумаги получить, что $\angle MBA = \angle BAD$ на рис. 2?

1.2. Определение параллелограмма. Полученное в п. 1.1 свойство считают основным для параллелограмма и поэтому параллелограмм определяют как четырёхугольник, у которого каждая пара противоположных сторон лежит на параллельных прямых.

Для удобства используют несколько изменённую формулировку.

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Вопрос. Какой треугольник называется равнобедренным?

1.3. Свойства параллелограмма. Возьмём параллелограмм $ABCD$. Проведём его диагональ AC (рис. 3).

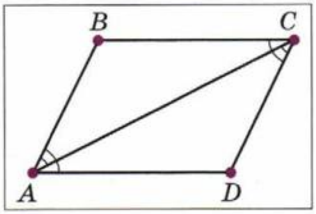


Рис. 3

Прямая AC является секущей при параллельных прямых AD и BC. Поэтому $\angle DAC = \angle BCA$. Точно так же, рассматривая прямые AB и CD, получим, что $\angle CAB = \angle ACD$.

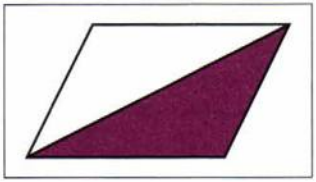


Рис. 4

По второму признаку равенства треугольники ABC и ADC равны. Отсюда следует, что равны соответствующие элементы этих треугольников: $AB = CD$; $AD = BC$; $\angle ABC = \angle ADC$.

Аналогичное рассуждение можно провести и для диагонали BD.

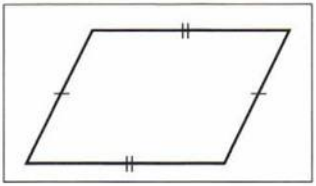


Рис. 5

Получили следующие свойства параллелограмма:

1) **Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника** (рис. 4).

2) **Противоположные стороны параллелограмма попарно равны** (рис. 5).

3) **Противоположные углы параллелограмма попарно равны** (рис. 6).

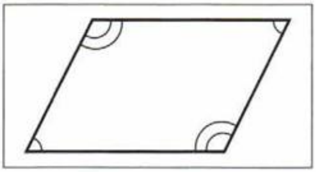


Рис. 6

Вопрос. Какие свойства диагоналей прямоугольника вы знаете?

1.4. Свойство точки пересечения диагоналей параллелограмма. Возьмём параллелограмм $ABCD$. Проведём его диагонали AC и BD и обозначим буквой O точку их пересечения (рис. 7).

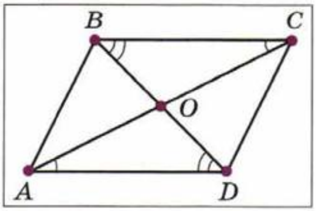


Рис. 7

По свойству сторон параллелограмма имеем $AD = BC$.

Отметим пары равных углов OAD, OCB и ODA, OBC.

По второму признаку треугольники AOD и BOC равны. Отсюда следует, что равны соответственные стороны этих треугольников: $AO = OC$, $BO = OD$.

Получаем следующее свойство диагоналей параллелограмма.

Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.

Вопрос. Какие свойства диагоналей ромба вы знаете?

1.5. Сумма соседних углов параллелограмма. Возьмём параллелограмм $ABCD$. Его соседние углы ABC и BAD являются внутренними односторонними углами, образованными секущей AB параллельных прямых AD и BC. Поэтому $\angle ABC + \angle BAD = 180°$ по свойству из п. 2.11 главы 6. Получаем следующее свойство углов параллелограмма (рис. 8).

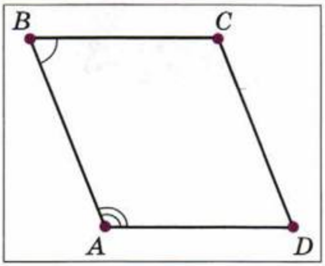


Рис. 8

Сумма двух соседних углов параллелограмма равна 180°.

Вопрос. Как доказанное свойство позволяет найти сумму всех углов параллелограмма?

1.6. Прямоугольник. Рассмотрим параллелограмм с прямым углом. Доказанные общие свойства параллелограмма позволяют заключить, что у параллелограмма с прямым углом все углы прямые, а противоположные стороны попарно равны. Следовательно, взятый параллелограмм является прямоугольником.

С другой стороны, противоположные стороны прямоугольника попарно параллельны, как перпендикуляры к одной прямой. Таким образом, прямоугольник можно определить как параллелограмм с прямым углом.

Вопрос. Как можно определить квадрат, пользуясь определением прямоугольника?

1.7. Ромб. Рассмотрим параллелограмм, у которого две соседние стороны равны. Доказанные общие свойства параллелограмма позволяют заключить, что у параллелограмма с двумя равными соседними сторонами все стороны равны. Следовательно, взятый параллелограмм является ромбом.

С другой стороны, всякий ромб является параллелограммом. Это следует из того, что диагональ делит ромб на два равных равнобедренных треугольника. Таким образом, ромб можно определить как параллелограмм, у которого две соседние стороны равны.

Вопрос. Как можно определить квадрат, пользуясь определением ромба?

Контрольные вопросы и задания

1. Какой четырёхугольник называется параллелограммом?

2. Сформулируйте свойства диагоналей параллелограмма.

3. Сформулируйте свойства сторон параллелограмма.

4. Сформулируйте свойства углов параллелограмма.

5. Какой параллелограмм будет прямоугольником?

6. Сформулируйте известные вам свойства прямоугольника.

7. Какой параллелограмм будет ромбом?

8. Сформулируйте известные вам свойства ромба.

9. Сформулируйте свойство углов с соответственно параллельными сторонами.

Задачи и упражнения

1. На двух параллельных прямых a и b выбраны точки A, B, C, D, как на рис. 9. Докажите, что прямая, проходящая через середину отрезка AB и параллельная прямой a, пересекает отрезок CD в середине.

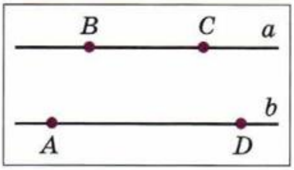


Рис. 9

2. Через все вершины треугольника ABC проведены прямые, параллельные противоположным сторонам. При пересечении этих трёх прямых образуется треугольник. Докажите, что каждая из сторон нового треугольника в два раза больше параллельной ей стороны треугольника ABC.

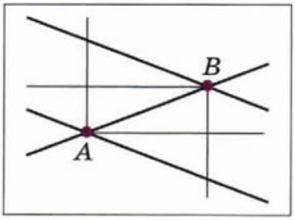


Рис. 10

3. На рис. 10 две параллельные прямые пересечены секущей. Вершинами какого многоугольника являются точки пересечения биссектрис всех изображённых углов с вершинами A и B?

4. В параллелограмме проводятся биссектрисы всех углов при вершинах. Выясните, какие из них попарно пересекаются, а какие нет.

5. В параллелограмме биссектрисы углов при вершинах пересекаются попарно в четырёх различных точках. Вершинами какого четырёхугольника являются эти точки?

6.* В прямоугольнике проводятся биссектрисы всех углов при вершинах. Докажите, что при пересечении биссектрис образуется квадрат.

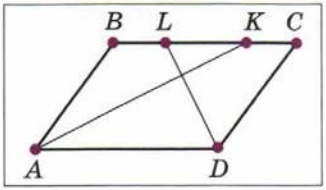


Рис. 11

7.** В параллелограмме $ABCD$ на рис. 11 проведены биссектрисы углов A и D. Найдите длину отрезка KL, если известно, что $AB = 78$ мм, $AD = 121$ мм.

8.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон не зависит от выбора точки.

9.** Докажите, что в равностороннем треугольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до всех трёх сторон не зависит от выбора этой точки.

Тесты

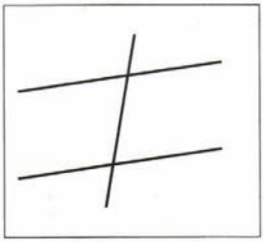


Рис. 12

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. На рис. 12 изображены две параллельные прямые, пересечённые третьей прямой. Чему равна сумма всех неразвёрнутых углов, которые можно указать на этом рисунке?

1) $180°$; 2) $360°$; 3) $540°$; 4) $720°$.

1.2. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Чему равна сумма углов ABC, CAB и DCA?

1) $180°$; 2) $360°$;
3) $90°$; 4) разная в разных случаях.

1.3. Что можно сказать о диагоналях параллелограмма?

1) диагонали параллелограмма всегда являются биссектрисами соответствующих углов;

2) диагонали параллелограмма всегда равны;

3) диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам;

4) диагонали параллелограмма всегда разбивают параллелограмм на четыре равных треугольника.

1.4. С какими из указанных углов может существовать параллелограмм?

1) $158°$ и $12°$; 2) $113°$ и $17°$; 3) $95°$ и $85°$; 4) $30°$ и $120°$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Сколько пар равных треугольников может оказаться на чертеже параллелограмма с проведёнными диагоналями?

1) 2; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

2.2. Каким может оказаться число пар равных сторон на чертеже некоторого параллелограмма?

1) 2; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

2.3. Каким может быть один из углов параллелограмма, если известно, что сумма двух каких-то его углов равна $150°$?

1) $75°$; 2) $83°$; 3) $93°$; 4) $105°$.

2.4.** Какие из приведённых утверждений всегда верны?

1) сумма длин диагоналей параллелограмма больше суммы длин любых двух его сторон;

2) сумма длин диагоналей параллелограмма меньше суммы длин любых двух его сторон;

3) сумма длин диагоналей параллелограмма больше его периметра;

4) сумма длин диагоналей параллелограмма меньше его периметра.

§ 2. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

2.1. Первый признак параллелограмма. Докажем следующий признак параллелограмма.

Если в четырёхугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то такой четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 1).

Рассмотрим треугольники AOB и COD. У них попарно равны стороны с вершиной O, а углы AOB и COD равны как вертикальные. По первому признаку равенства треугольников $\Delta AOB = \Delta COD$. Тогда $\angle ABO = \angle CDO$ как соответственные углы равных треугольников.

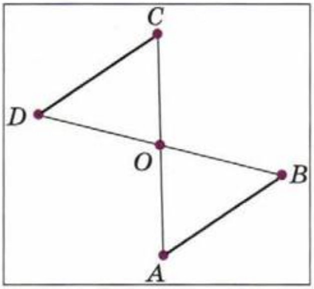


Рис. 1

Углы ABO и CDO являются внутренними накрест лежащими для прямых AB, CD и секущей BD. Так как $\angle ABO = \angle CDO$, то по признаку параллельности прямых прямые AB и CD параллельны.

Рассмотрев треугольники AOD и BOC, аналогичными рассуждениями придём к тому, что $AD \parallel BC$ (рис. 2).

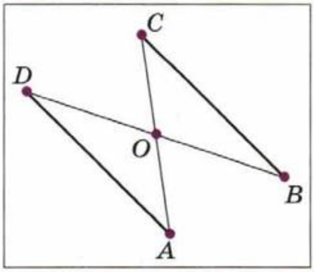


Рис. 2

Таким образом, получаем $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$, а поэтому четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Из этого признака, например, сразу следует, что ромб является параллелограммом.

Вопрос. Какой признак прямоугольника вы можете предложить?

2.2. Второй признак параллелограмма. Иногда удобно использовать следующий признак параллелограмма.

Если в четырёхугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырёхугольник — параллелограмм.

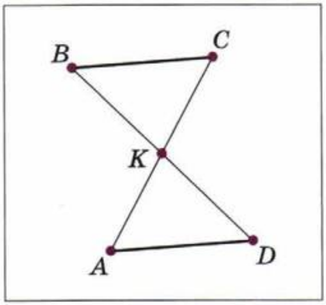


Рис. 3

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ равны и параллельны стороны AD и BC. Проведём диагонали AC и BD и обозначим через K точку их пересечения (рис. 3).

Из параллельности прямых AD и BC следует, что $\angle ADB = \angle CBD$, как внутренние накрест лежащие, и $\angle CAD = \angle ACB$ по той же причине.

Получаем, что сторона BC и прилежащие к ней углы треугольника BCK соответственно равны стороне AD и прилежащим к ней углам треугольника ADK. По второму признаку равенства треугольников $\Delta AKD = \Delta BKC$. Следовательно, $AK = KC$, $BK = KD$, и по первому признаку можно сделать вывод, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Вопрос. Как на практике проверить параллельность двух отрезков?

2.3. Третий признак параллелограмма. Докажем ещё один признак параллелограмма.

Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то такой четырёхугольник — параллелограмм.

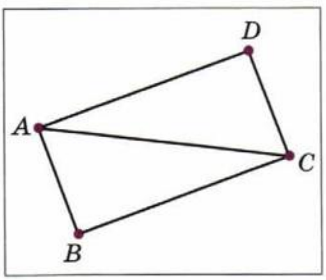


Рис. 4

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ равны стороны AB и CD и равны стороны AD и BC.

Проведём диагональ AC и рассмотрим треугольники ADC и ABC (рис. 4), у которых сторона AC общая. Они равны по третьему признаку равенства треугольников. Значит, их соответственные углы BAC и DCA равны. Эти углы являются внутренними накрест лежащими для прямых AB и CD и секущей AC. По признаку параллельности прямых $AB \parallel CD$. По условию $AB = CD$, поэтому второй признак позволяет сделать вывод, что $ABCD$ — параллелограмм.

Вопрос. Как доказать, что четырёхугольник, у которого все стороны равны, является параллелограммом?

2.4.* Параллелограммы с общей стороной. Рассмотрим на рис. 5 два параллелограмма $ABCD$ и $ABKL$ с общей стороной AB.

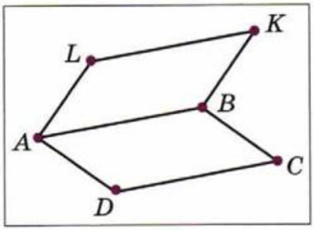


Рис. 5

Из свойств параллелограмма следует, что $AB = CD$, $AB \parallel CD$ и $AB = LK$, $AB \parallel LK$. Следовательно, $CD = AB = LK$, $CD \parallel AB \parallel LK$.

Таким образом, в четырёхугольнике с вершинами C, D, L, K отрезки CD, LK равны и параллельны.

По второму признаку параллелограмма точки C, D, L, K являются вершинами параллелограмма.

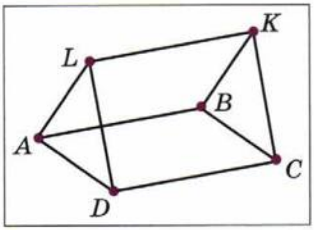


Рис. 6

Может показаться, что из приведённых рассуждений мы сразу же получаем четырёхугольник $CDLK$, который можно видеть на рис. 6.

Однако, как видно на рис. 7, при соединении концов двух параллельных отрезков LK и DC равной длины может получиться не четырёхугольник. Можно показать, что на рис. 6 отрезки CK и DL не пересекаются, и поэтому фигура $CDLK$ действительно является параллелограммом.

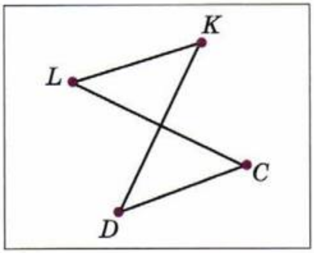


Рис. 7

Вопрос. Как доказать, что если параллелограммы $ABCD$ и $ABKL$ — прямоугольники, то $CDLK$ тоже прямоугольник?

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте признак параллелограмма по свойству диагоналей.

2. Сформулируйте признак параллелограмма по свойству двух противоположных сторон.

3. Сформулируйте признак параллелограмма по свойству четырёх сторон.

Задачи и упражнения

1. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и CD выбраны соответственно точки M и K так, что $AM = CK$. Докажите, что четырёхугольник $MBKD$ — параллелограмм.

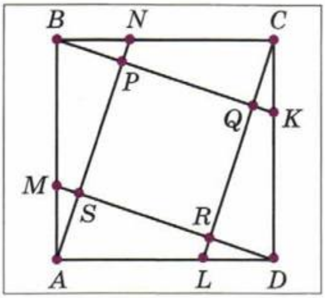


Рис. 8

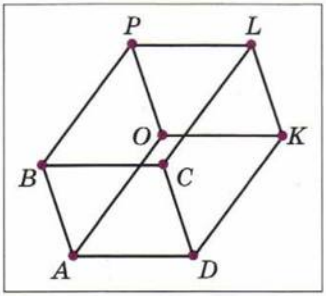


Рис. 9

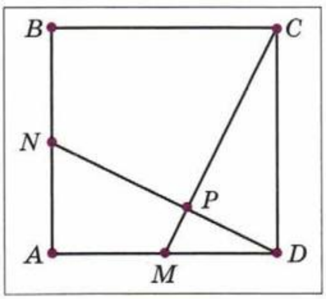


Рис. 10

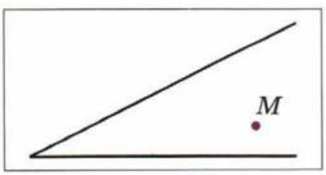


Рис. 11

2.** В треугольнике медиана совпадает с биссектрисой, проведённой из той же вершины. Докажите, что треугольник равнобедренный.

3. Из точки пересечения диагоналей ромба проводятся перпендикуляры к сторонам. Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами прямоугольника.

4.* На сторонах квадрата $ABCD$ выбраны точки M, N, K, L так, что $AM = BN = CK = DL$. Точки M, N, K и L соединены с вершинами квадрата как на рис. 8. Докажите, что образующийся при этом четырёхугольник $PQRS$ — квадрат.

5.* На рис. 9 изображены параллелограммы $ABCD$, $CDKL$, $BCLP$. Точка O выбрана так, что $ABPO$ — параллелограмм. Докажите, что четырёхугольники $AOKD$ и $KOPL$ тоже параллелограммы.

6. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Докажите, что: а) если $BM = \frac{1}{2} \cdot AC$, то треугольник ABC прямоугольный; б)* если треугольник ABC прямоугольный (с прямым углом B), то $BM = \frac{1}{2} \cdot AC$.

7.** Точки M и N — середины сторон AD и AB квадрата $ABCD$, изображённого на рис. 10. Отрезки CM и DN пересекаются в точке P. Докажите, что $BP = BC$.

8. Постройте параллелограмм:

а) по двум соседним сторонам и диагонали;

б) по двум диагоналям и углу между ними;

в) по стороне и двум диагоналям;

г)** по стороне, сумме диагоналей и углу между диагоналями.

9.* Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

10.* Даны угол и точка M внутри угла (рис. 11). Проведите прямую l так, чтобы она пересекала стороны угла в точках A и B, а точка M являлась серединой отрезка AB.

11.* Докажите, что длина медианы треугольника меньше полусуммы сторон, выходящих из той же вершины, что и медиана.

12.* Докажите, что сумма длин всех медиан треугольника меньше периметра этого треугольника.

13. Предложите свой признак равенства параллелограммов.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое из перечисленных свойств четырёхугольника является признаком параллелограмма?

1) диагонали перпендикулярны;
2) диагонали равны;
3) диагонали точкой пересечения делятся пополам;
4) диагонали равны и перпендикулярны.

1.2. В каком из перечисленных случаев можно сделать вывод, что четырёхугольник $ABCD$ не является параллелограммом?

1) $AB = CD$ и $AB \parallel CD$;
2) $AB = CD$ и $AD = BC$;
3) $AB = AC$ и $AD = AC$;
4) $AB + BC > AD + DC$.

1.3. В каком из перечисленных случаев можно сделать вывод, что у четырёхугольника $ABCD$ имеются две параллельные стороны?

1) $\angle ABC = \angle ADC$;
2) $\angle ABC + \angle BAD = 180°$;
3) $\angle ABC + \angle ADC = 180°$;
4) $\angle BAC = \angle CAD$.

1.4. В треугольнике ABC медиана AK оказалась равна половине стороны BC. Что можно сказать о таком треугольнике?

1) такого треугольника не существует;
2) такой треугольник тупоугольный;
3) такой треугольник остроугольный;
4) такой треугольник прямоугольный.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. У любого параллелограмма имеется:

1) пара равных углов; 2) две пары равных углов;
3) пара равных сторон; 4) четыре равные стороны.

2.2. В каком из перечисленных случаев четырёхугольник обязательно является параллелограммом?

1) у четырёхугольника имеются две пары равных сторон;

2) у четырёхугольника имеются две пары равных углов;

3) у четырёхугольника имеются две пары равных противоположных сторон;

4) у четырёхугольника имеются две пары равных противоположных углов.

2.3. Какие свойства из перечисленных могут иметь и некоторый параллелограмм, и некоторый четырёхугольник, не являющийся параллелограммом?

1) диагонали равны;

2) диагонали перпендикулярны;

3) диагонали являются биссектрисами углов;

4) диагонали не имеют общих точек.

2.4. Какие значения может иметь периметр параллелограмма, у которого одна из сторон равна 12 см, а сумма некоторых трёх сторон равна 40 см?

1) 50 см; 2) 52 см; 3) 54 см; 4) 56 см.

§ 3. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

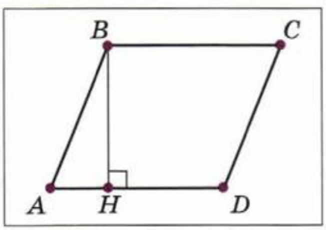


Рис. 1

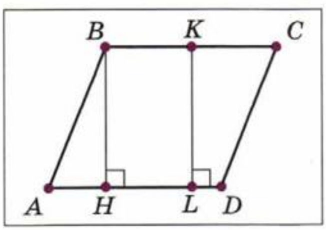


Рис. 2

3.1. Основание и высота параллелограмма. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 1). Проведём из точки B перпендикуляр BH к стороне AD. Тогда сторону AD параллелограмма $ABCD$ называют *основанием*, а отрезок BH — *высотой* параллелограмма $ABCD$, проведённой к этому основанию.

Из любой точки K прямой BC, отличной от точки B, опустим перпендикуляр KL на прямую AD. Тогда KL и BH параллельны, как перпендикуляры к прямой AD, а BK и HL параллельны, так как расположены на параллельных прямых BC и AD. Поэтому $BKLH$ — параллелограмм, его противоположные стороны равны, в частности, $KL = BH$ (рис. 2). Следовательно, расстояния от точек B и K до прямой AD равны.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется расстояние от любой точки одной прямой до другой прямой.

В частности, длина высоты параллелограмма $ABCD$, проведённой к стороне AD, равна расстоянию между параллельными прямыми BC и AD. Отрезок KL тоже можно считать высотой данного параллелограмма, проведённой к основанию AD.

Вопрос. Сколько различных высот можно провести из всех вершин параллелограмма?

3.2. Вычисление площади параллелограмма. В параллелограмме $ABCD$ проведём высоту BH (рис. 3).

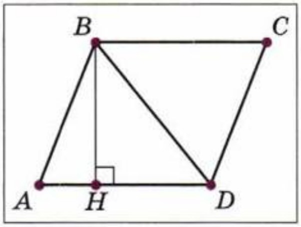


Рис. 3

Разобьём параллелограмм диагональю BD на два равных треугольника ABD и BCD. Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников ABD и BCD. Так как $S_{\Delta BCD} = S_{\Delta ABD}$ и $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH$, то площадь параллелограмма равна

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot BH + \frac{1}{2}AD \cdot BH = AD \cdot BH.$$

Обозначим длину основания AD буквой a, а высоту BH — буквой h. Тогда равенство $S = AD \cdot BH$ можно записать в виде формулы

$$\boldsymbol{S = a \cdot h}.$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведённую к этому основанию.

Вопрос. Как доказать, что значение площади параллелограмма не зависит от того, в каком месте проводить высоту к данному основанию?

Контрольные вопросы и задания

1. Что считают основанием параллелограмма и высотой, проведённой к этому основанию?

2. Как к заданному основанию параллелограмма провести его высоту?

3. По какой формуле можно вычислить площадь параллелограмма?

Задачи и упражнения

1. Прямоугольный участок длиной 8 км имеет площадь 400 га. Какова ширина участка?

2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $\angle BAD = 45°$, $AB = 9$ см, $AD = 4$ см.

3. Периметр ромба равен 52 см, а одна из его диагоналей — 10 см. Найдите площадь ромба.

4.* Найдите площадь параллелограмма со сторонами 7 см и 9 см и острым углом в 60°.

5.* Найдите площадь параллелограмма со сторонами 5 см и 6 см и тупым углом в 150°.

6. Площадь параллелограмма равна 480 см^2, его периметр равен 112 см, а расстояние между двумя противоположными сторонами равно 12 см. Найдите расстояние между двумя другими противоположными сторонами.

7.** Найдите площадь параллелограмма, зная его периметр p и высоты m и n.

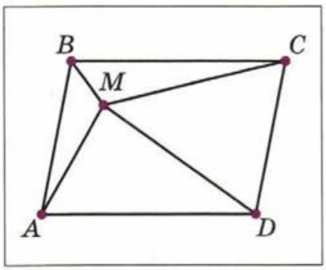


Рис. 4

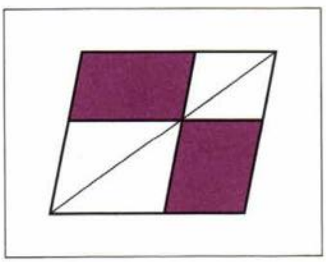


Рис. 5

8. Докажите, что если любую точку внутри параллелограмма соединить с вершинами, как изображено на рис. 4, то сумма площадей треугольников AMB и CMD будет равна сумме площадей треугольников AMD и BMC.

9.* Через вершину параллелограмма проведите три прямые, которые делят параллелограмм на четыре части равной площади.

10.** Через вершину параллелограмма проведите две прямые, которые делят параллелограмм на три части равной площади.

11.** Проведите через заданную точку прямую, которая делит площадь данного параллелограмма пополам.

12.* На диагонали параллелограмма выбрана произвольная точка и через эту точку проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма (рис. 5). Докажите, что площади заштрихованных частей равны.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. У параллелограмма сторона равна 5 см, а проведённая к ней высота равна 17 см. Чему равна площадь параллелограмма?

1) 22 см^2; 2) $\frac{85}{2}$ см^2; 3) 170 см^2; 4) 85 см^2.

1.2. Какую наибольшую площадь может иметь параллелограмм со сторонами 12 см и 18 см?

1) 144 см^2; 2) 164 см^2; 3) 216 см^2; 4) 256 см^2.

1.3. Чему равна высота, проведённая в параллелограмме с площадью 25 см^2 к стороне, длина которой равна 4 см?

1) 5,25 см; 2) 6,25 см;
3) 7,25 см; 4) 8,25 см.

1.4. Какую наибольшую площадь может иметь параллелограмм со стороной 6 см и диагональю 10 см?

1) 60 см^2; 2) 80 см^2;
3) 100 см^2; 4) 120 см^2.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. У параллелограмма сторона равна 5 см, а высоты 6 см и 8 см. Какие значения площади параллелограмма возможны?

1) 28 см^2; 2) 30 см^2;
3) 40 см^2; 4) 48 см^2.

2.2. Какую площадь может иметь параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см, у которого одна из высот равна 3 см?

1) 18 см^2; 2) 22 см^2;
3) 24 см^2; 4) 28 см^2.

2.3. Какую площадь может иметь параллелограмм со сторонами 8 см и 10 см, у которого одна из высот равна 9 см?

1) 64 см^2; 2) 72 см^2;
3) 90 см^2; 4) 120 см^2.

2.4. У каких из следующих параллелограммов площадь равна 36 см^2 при данной стороне b и проведённой к этой стороне высоте h?

1) $b = 6$ см, $h = 6$ см; 2) $b = 4$ см, $h = 9$ см;
3) $b = 12$ см, $h = 6$ см; 4) $b = 24$ см, $h = 3$ см.

§ 4. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

4.1. Примеры центрально симметричных фигур. Вспомним фигуры, симметричные относительно оси. Например, такой симметричностью обладает знак суммирования, изображённый на рис. 1.

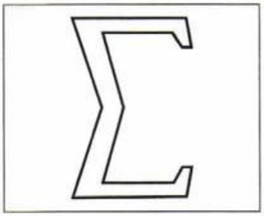


Рис. 1

Симметричные относительно оси фигуры обладают некоторой «правильностью» строения.

Другого рода «правильностью» строения обладают фигуры, изображённые на рис. 2 и 3. Каждая из этих фигур имеет центр, при повороте вокруг которого на 180° фигура переходит сама в себя.

Рис. 2

Аналогичным свойством обладает слово «*SOS*» на рис. 4.

Фигуры на рис. 2, 3, 4 являются примерами *центрально симметричных* фигур.

Вопрос. Относительно какой прямой симметричен знак $\sum$?

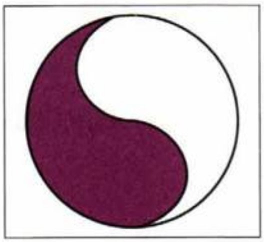


Рис. 3

4.2. Центрально симметричные точки. Выберем на плоскости точку O.

Различные точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA_1 (рис. 5).

В таком случае точку A_1 называют симметричной точке A относительно точки O. Соответственно точку A также можно назвать симметричной точке A_1 относительно точки O.

Точку O считают симметричной самой себе относительно точки O.

Рис. 4

Вопрос. Почему на числовой прямой противоположные друг другу числа симметричны относительно нуля?

4.3. Центрально симметричные фигуры. Две фигуры Φ_1 и Φ_2 плоскости называют симметричными относительно точки O, если каждая точка фигуры Φ_1 симметрична некоторой точке фигуры Φ_2 относительно точки O и, наоборот, каждая точка фигуры Φ_2 симметрична некоторой точке фигуры Φ_1 относительно точки O.

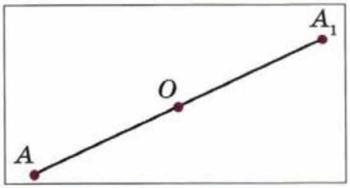


Рис. 5

В таком случае фигуру Φ_1 называют *центрально симметричной* фигуре Φ_2 относительно *центра симметрии* O. Соответственно фигуру Φ_2 можно назвать центрально симметричной фигуре Φ_1 относительно центра симметрии O.

На рис. 6 изображены две центрально симметричные друг другу фигуры.

Вопрос. В каком случае фигуру можно назвать центрально симметричной?

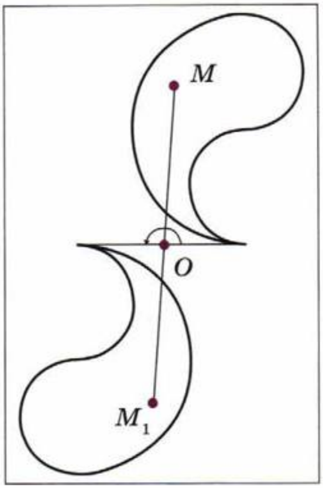


Рис. 6

4.4. Центральная симметрия является поворотом. Фигура, центрально симметричная длиной фигуре относительно точки O, может быть получена поворотом вокруг точки O на $180°$.

Действительно, при повороте на $180°$ любая точка M перейдёт в точку M_1, расположенную на луче, дополнительном к лучу OM, причём $OM_1 = OM$. Значит, точка O является серединой отрезка MM_1, а поэтому точка M_1 симметрична точке M относительно точки O.

Ранее говорилось, что поворот является перемещением плоскости. Следовательно, центральная симметрия тоже является перемещением плоскости. Это значит, что при центральной симметрии отрезок переходит в равный ему отрезок, прямая переходит в прямую, треугольник переходит в равный ему треугольник и так далее.

Вопрос. Как построить окружность, центрально симметричную данной окружности относительно заданной точки F?

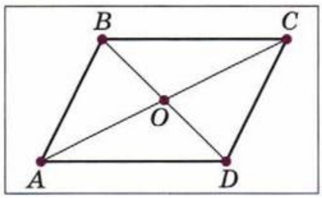


Рис. 7

4.5. Центр симметрии параллелограмма. Докажем, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

Доказательство. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 7).

Рассмотрим симметрию относительно точки O.

Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то при этой центральной симметрии происходит следующее (рис. 8):

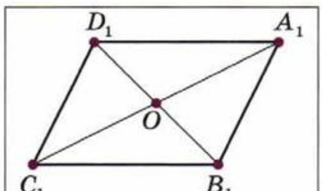


Рис. 8

точка A переходит в точку A_1, совпадающую с точкой C;
точка C переходит в точку C_1, совпадающую с точкой A;
точка B переходит в точку B_1, совпадающую с точкой D;
точка D переходит в точку D_1, совпадающую с точкой B.

Из свойств перемещения следует, что при этом отрезки AB, BC, CD, DA переходят соответственно в отрезки CD, DA, AB, BC, то есть весь параллелограмм $ABCD$ переходит в себя при симметрии относительно точки пересечения диагоналей.

Вопрос. Какие свойства центральной симметрии вы знаете?

4.6. Свойство центрально симметричных прямых. Докажем, что при центральной симметрии относительно точки O прямая l, не проходящая через точку O, переходит в прямую m, параллельную прямой l.

Доказательство. Так как центральная симметрия является перемещением, то прямая l переходит в некоторую прямую m.

Выберем на прямой l любые две различные точки A и B. Построим точку C прямой m, симметричную точке A, и точку D прямой m, симметричную точке B относительно точки O (рис. 9).

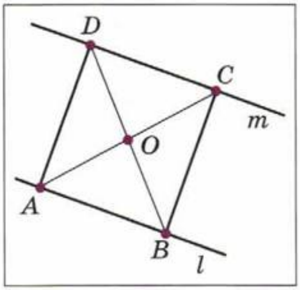


Рис. 9

В результате построения получим отрезки AC и BD, которые в точке пересечения делятся пополам. Соединяя последовательно отрезками точки A, B, C и D, получим четырёхугольник.

По признаку из пункта 2.1 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Следовательно, $AB \parallel CD$, то есть $l \parallel m$, что и требовалось доказать.

Вопрос. В какую прямую при центральной симметрии переходит прямая, проходящая через центр симметрии?

4.7. Анализ доказательства из п. 4.6.** Рассмотрим доказательство, которое приводилось в предыдущем пункте.

При доказательстве мы опирались на то, что отрезки AD и BC не пересекаются.

Покажем, как это можно получить, опираясь на ранее изученные свойства.

Рассмотрим на рис. 10 две полуплоскости α и β с границей AC. Так как отрезки BD и AC пересекаются, то точки B и D лежат в разных полуплоскостях.

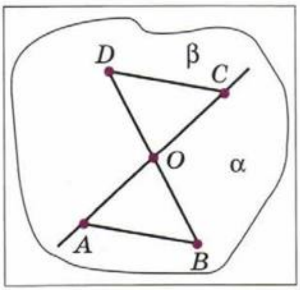


Рис. 10

У отрезка AB точка B лежит в полуплоскости α, а точка A — на границе этой полуплоскости.

Следовательно, все остальные точки отрезка AB лежат в полуплоскости α. Аналогично получается, что у отрезка CD точка D лежит в полуплоскости β, точка C — на границе этой полуплоскости, а все остальные точки — в полуплоскости β.

Таким образом, отрезки AB и CD не имеют общих точек.

Точно так же удаётся показать, что отрезки AD и CB не пересекаются. Поэтому, соединяя последовательно отрезками точки A, B, C, D, получаем четырёхугольник.

Вопрос. Какие признаки параллельности прямых вы знаете?

Контрольные вопросы и задания

1. Какие точки называют центрально симметричными относительно некоторой точки?

2. Какую фигуру называют центрально симметричной другой фигуре относительно некоторой точки?

3. Что такое центр симметрии?

4. Какую фигуру называют центрально симметричной?

5. Как центральная симметрия связана с поворотами плоскости?

6. Докажите, что параллелограмм является центрально симметричной фигурой.

7. Во что переходит прямая при центральной симметрии?

Задачи и упражнения

1. Стороны двух квадратов, имеющих общий центр, пересекаются попарно в восьми точках, как изображено на рис. 11. Докажите, что стороны MN и KL восьмиугольника с вершинами в этих точках равны.

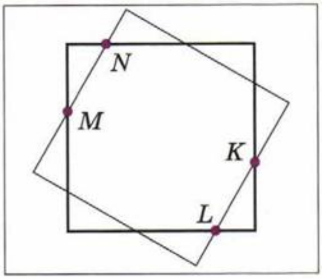


Рис. 11

2.* Для некоторой фигуры F_1 построили центрально симметричную ей фигуру F_2 относительно центра O. Докажите, что общие точки фигур F_1 и F_2 образуют центрально симметричную фигуру с центром O.

3.** Внутри квадратной области K_1 выбрали некоторую точку F (рис. 12) и построили фигуру K_2, симметричную K_1 относительно точки F. Какую фигуру образуют общие точки фигур K_1 и K_2?

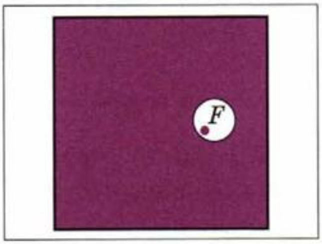


Рис. 12

4. Докажите, что центрально симметричный многоугольник имеет чётное число вершин.

5.* Приведите примеры центрально симметричных ломаных с нечётным числом вершин.

6.* Приведите пример фигуры, имеющей бесконечное число центров симметрии.

7. Постройте треугольник, центрально симметричный данному треугольнику относительно заданной точки.

8.* Даны пересекающиеся прямые a и b и точка F, не лежащая на прямых. Проведите через точку F прямую, пересекающую прямые a и b в точках A и B так, чтобы точка F была серединой отрезка AB.

9.** Даны прямая a, окружность S и точка F, не лежащая на них. Найдите на окружности точку A и на прямой точку B так, чтобы точка F была серединой отрезка AB.

10.* Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую так, чтобы обе окружности высекали на этой прямой равные хорды.

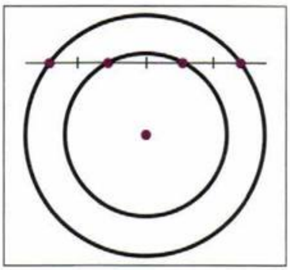


Рис. 13

11.** Даны две окружности с общим центром. Проведите прямую так, чтобы при её пересечении с окружностями образовалось три равных отрезка (рис. 13).

12.** Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то фигура имеет и центр симметрии.

13. Рассмотрим координатную плоскость с началом в точке O.

а) Покажите, что точки $A(5; 3)$ и $B(-5; -3)$ симметричны относительно точки O.

б) Покажите, что при симметрии относительно точки O точка $M(a; b)$ переходит в точку $M_1(-a; -b)$.

в) Найдите координаты вершин квадрата $ABCD$, симметричного относительно точки O, если известно, что точка A имеет координаты $(-7; 3)$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Поворот на какой из перечисленных углов является центральной симметрией?

1) 360°; 2) 180°; 3) 90°; 4) 45°.

1.2. Какая из следующих фигур не имеет центра симметрии?

1) отрезок; 2) треугольник;

3) прямоугольник; 4) параллелограмм.

1.3. Какая из следующих фигур может быть центрально симметричной?

1) угол;

2) треугольник с двумя неравными сторонами;

3) треугольник с двумя неравными углами;

4) четырёхугольник с двумя равными сторонами.

1.4. Сколько центров симметрии может иметь фигура, составленная из двух отрезков?

1) один; 2) два; 3) четыре; 4) сколько угодно.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных фигур могут быть центрально симметричными?

1) луч; 2) треугольник;

3) четырёхугольник; 4) шестиугольник.

2.2. Какие из указанных фигур могут иметь центр симметрии?

1) фигура, составленная из двух неравных отрезков;

2) фигура, составленная из двух неравных окружностей;

3) фигура, составленная из двух непересекающихся отрезков;

4) фигура, составленная из окружности с хордой, не являющейся диаметром.

2.3. Какие из перечисленных фигур центрально симметричны?

1) параллелограмм с проведённой диагональю;

2) правильный треугольник с проведённой средней линией;

3) ромб с проведёнными диагоналями;

4) фигура, составленная из двух различных прямых.

2.4. Какие из следующих фигур не центрально симметричны?

1) неравносторонний треугольник;

2) четырёхугольник, не являющийся параллелограммом;

3) фигура, составленная из двух равных окружностей;

4) фигура, составленная из шести окружностей, имеющих общий центр.

Глава 9

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

В этой главе рассматриваются важные свойства параллельных прямых, пересекающих стороны угла, определяется новая геометрическая фигура — трапеция, изучаются свойства средних линий треугольника и трапеции, доказывается свойство точки пересечения медиан треугольника.

§ 1. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

1.1. Свойство прямой, проходящей через середину стороны треугольника параллельно другой стороне. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Проведём через середину M стороны AB прямую m, параллельную прямой AC. Обозначим буквой N точку пересечения прямой m со стороной BC (рис. 1).

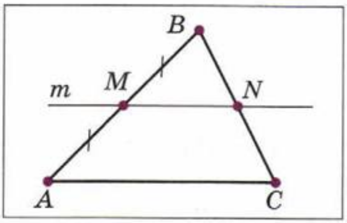


Рис. 1

Докажем, что точка N — середина стороны BC. Для этого выполним дополнительное построение, проведя через точку C прямую l, параллельную прямой AB. Обозначим буквой K точку пересечения прямых m и l (рис. 2). Так как $AM \parallel CK$ и $MK \parallel AC$, четырёхугольник $AMKC$ — параллелограмм. Поэтому $AM = KC = BM$.

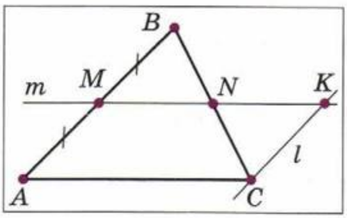


Рис. 2

Рассмотрим треугольники BMN и CKN (рис. 3). Углы BMN и CKN внутренние накрест лежащие, образованные секущей MK с параллельными прямыми AB и CK, значит, $\angle BMN = \angle CKN$. Аналогично доказывается, что $\angle MBN = \angle KCN$.

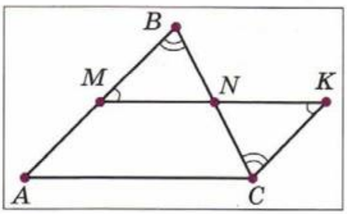


Рис. 3

В итоге получаем, что треугольники MBN и CKN равны по второму признаку. Отсюда следует, что равны соответственные стороны BN и NC этих треугольников, что и требовалось доказать.

Вопрос. Как доказать, что $|MK| = 2|NK|$ (см. рис. 3)?

1.2. Почему прямая, проходящая через одну сторону треугольника параллельно другой стороне, пересекает третью.** Известно, что прямая не всегда пересекает отрезок. Однако в предыдущем пункте на рис. 1 мы без обоснования рассмотрели точку N пересечения отрезка BC с прямой m. Покажем, как, опираясь на основные свойства прямых, доказать, что такая точка существует.

Прямая m делит плоскость на две полуплоскости, обозначенные на рис. 4 буквами a и β. Так как отрезок AB имеет общую точку M с прямой m, то точки A и B лежат в различных полуплоскостях, что и отражено на рис. 4.

Далее, прямая AC параллельна прямой m, а поэтому отрезок AC не пересекает прямую m. Это значит, что точки A и C расположены в одной полуплоскости относительно прямой m.

Следовательно, точки B и C лежат в различных полуплоскостях a и β. Поэтому отрезок BC пересекает прямую m, что и требовалось доказать.

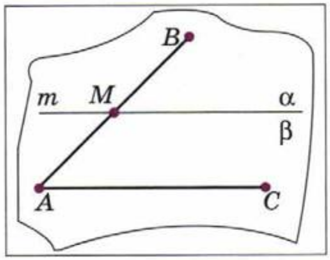


Рис. 4

Вопрос. Как доказать, что отрезки AC и BD не пересекаются (рис. 5)?

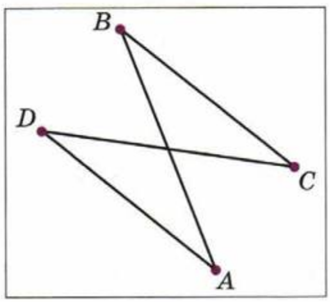


Рис. 5

1.3. Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называют *средней линией* треугольника.

На рис. 6 изображена средняя линия MN, соединяющая середины сторон AB и BC треугольника ABC.

В пункте 1.1 мы установили, что если через середину M стороны AB провести прямую m, параллельную стороне AC, то такая прямая пересечёт сторону BC в её середине, то есть в точке N.

Середина любого отрезка определяется единственным образом. Отсюда следует, что средней линией треугольника ABC, соединяющей середины сторон AB и BC, может быть только отрезок MN, который параллелен стороне AC.

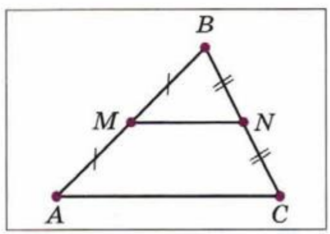


Рис. 6

Вопрос. Сколько всего средних линий в треугольнике?

1.4. Свойство средней линии треугольника. Изобразим ещё раз рис. 3 из пункта 1.1 (рис. 7). Как было доказано, четырёхугольник $AMKC$ — параллелограмм, а треугольники MBN и KCN равны. Из равенства треугольников следует равенство отрезков MN и NK, а по свойству сторон параллелограмма отрезки AC и MK равны. Поэтому

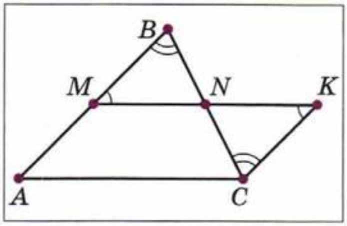


Рис. 7

$$2MN = MN + NK = MK = AC,$$

откуда $MN = \frac{1}{2} \cdot AC$.

Таким образом, доказана теорема.

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

Вопрос. Чему равна площадь треугольника, образованного средними линиями, если площадь данного треугольника равна S?

1.5.* Свойство середин сторон произвольного четырёхугольника. Возьмём произвольный четырёхугольник $ABCD$, например, такой, как изображённый на рис. 8. Покажем, что середины сторон этого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Пусть N и M — середины двух соседних сторон AB и AD (рис. 9). Рассмотрим треугольник ABD. В нём MN является средней линией, а поэтому $MN \parallel BD$ и $MN = \frac{1}{2} \cdot BD$.

Аналогично: если L и K — середины сторон CB и CD треугольника CBD, то $KL \parallel BD$ и $KL = \frac{1}{2} \cdot BD$ (рис. 10).

Следовательно, $MN \parallel KL$ и $MN = KL$. По признаку четырёхугольник $MNKL$ является параллелограммом (рис. 11), что и требовалось установить.

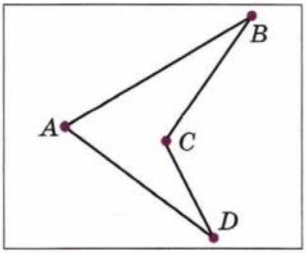


Рис. 8

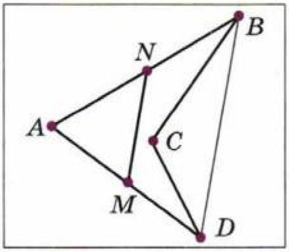


Рис. 9

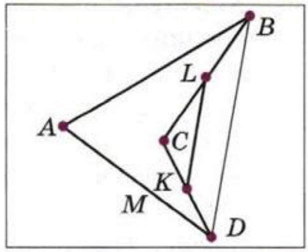


Рис. 10

Вопрос. Как доказать, что прямые AC, NL и MK на рис. 11 параллельны между собой?

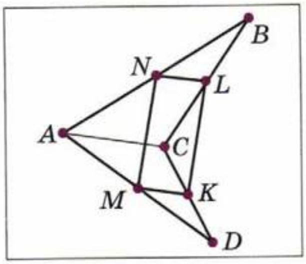


Рис. 11

1.6. Свойство точки пересечения медиан треугольника. Все медианы треугольника обладают следующим свойством.

Теорема. **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая из медиан делится точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.**

Доказательство. Проведём в треугольнике ABC медианы AM и BN и обозначим точку пересечения этих медиан буквой O (рис. 12).

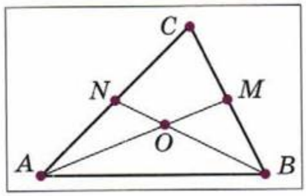


Рис. 12

В треугольниках ABC и ABO проведём средние линии MN и KL, параллельные стороне AB (рис. 13). Тогда $MN \parallel KL$, и по свойству средней линии $MN = \frac{1}{2} \cdot AC$, $KL = \frac{1}{2} \cdot AC$, откуда $MN = KL$. В результате, по соответствующему признаку, получаем, что четырёхугольник $MKLN$ — параллелограмм. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, поэтому $MO = OL$ и $NO = OK$ (рис. 14). Но так как $AL = LO$ и $BK = KO$, то $AL = LO = OM = \frac{1}{3} \cdot AM$, $BK = KO = ON = \frac{1}{3} \cdot BN$. Следовательно, для точки O пересечения медиан AM и BN выполняются соотношения:

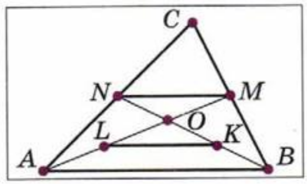


Рис. 13

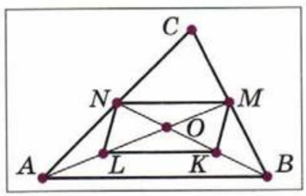


Рис. 14

$$AO : OM = 2 : 1, BO : ON = 2 : 1.$$

Аналогично можно рассмотреть медианы AM и CP (рис. 15) и получить, что для точки F их пересечения выполняются соотношения:

$$AF : FM = 2 : 1 \text{ и } CF : FP = 2 : 1.$$

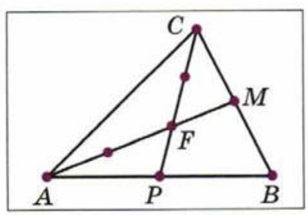


Рис. 15

Так как отрезок AM можно единственным образом разбить на три равные части, из равенств $AF : FM = 2 : 1$ и $AO : OM = 2 : 1$ следует совпадение точек F и O.

Таким образом, свойство медиан треугольника доказано.

Вопрос. Чему равно расстояние от вершины равностороннего треугольника со стороной 10 см до точки пересечения его медиан?

Контрольные вопросы и задания

1. Какие свойства параллелограмма вы знаете?

2. Какие признаки параллелограмма вы знаете?

3. Как определяется средняя линия треугольника?

4. Сформулируйте теорему о средней линии треугольника и приведите её доказательство.

5. Сформулируйте теорему о медианах треугольника и приведите её доказательство.

Задачи и упражнения

1. Периметр треугольника ABC равен 14 см. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

2. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см, а периметр треугольника равен 16 см. Найдите стороны треугольника.

3. Диагонали параллелограмма равны 5 см и 9 см. Найдите периметр четырёхугольника с вершинами в серединах сторон параллелограмма.

4. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

5. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

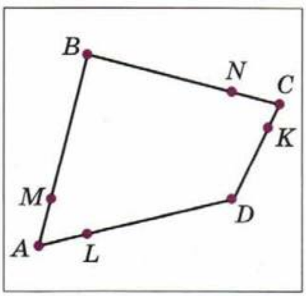


Рис. 16

6.* На рис. 16 точки M, N, K, L расположены на сторонах четырёхугольника $ABCD$ так, что $AM : MB = AL : LD = CN : NB = CK : KD = 1 : 3$. Докажите, что $MNKL$ — параллелограмм.

7.* По разные стороны от данной прямой на расстоянии 10 см и 4 см от неё даны две точки A и B. Найдите расстояние от середины отрезка AB до этой прямой.

8.* Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник, зная середины его сторон.

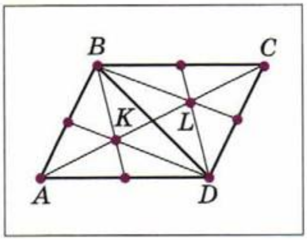


Рис. 17

9.* В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны AD, точка L — середина стороны BC. Докажите, что отрезки BK и DL делят диагональ AC на три равные части.

10.* На рис. 17 параллелограмм $ABCD$ разбит диагональю BD на два треугольника, и в треугольниках ABD и BCD проведены все медианы. Докажите, что четырёхугольник $BKDL$ — параллелограмм.

11.* Найдите условие, при котором середины сторон четырёхугольника являются:

а) вершинами ромба; б) вершинами прямоугольника.

12.** Постройте параллелограмм, зная середины трёх его сторон.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Длины сторон треугольника 5 см, 7 см и 10 см. Какую длину имеет одна из средних линий этого треугольника?

1) 6 см; 2) 5 см; 3) 4 см; 4) 3 см.

1.2. В ромбе диагонали равны 6 см и 9 см. Чему равен периметр прямоугольника, полученного соединением середин сторон этого ромба?

1) 12 см; 2) 15 см; 3) 18 см; 4) 36 см.

1.3. В треугольнике площади S проведена средняя линия. Чему равна площадь отсечённого ею треугольника?

1) $\frac{S}{2}$; 2) $\frac{S}{3}$; 3) $\frac{S}{4}$; 4) $\frac{S}{6}$.

1.4. Треугольник DEF образован средними линиями треугольника ABC. Чему равен периметр треугольника DEF, если периметр треугольника ABC равен 36 см?

1) 9 см; 2) 12 см; 3) 15 см; 4) 18 см.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В треугольнике ABC проведены все три средние линии. Сколько пар равных треугольников можно указать на чертеже?

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 6.

2.2. В треугольнике средние линии равны 3 см, 3 см и 5 см. Отрезки какой длины могут быть сторонами этого треугольника?

1) 10 см; 2) 2,5 см; 3) 3 см; 4) 6 см.

2.3. В треугольнике медианы равны 8 см, 9 см и 12 см. Какие в нём возможны длины отрезков медиан, отделяемых точкой их пересечения?

1) 2 см; 2) 3 см; 3) 4 см; 4) 8 см.

2.4.* Две средние линии треугольника имеют длины 8 см и 10 см. Какие из указанных величин могут быть длиной стороны треугольника?

1) 4 см; 2) 16 см; 3) 28 см; 4) 36 см.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СЕКУЩИЕ СТОРОН УГЛА

2.1. Теорема Фалеса. Рассмотрим произвольный угол. Отложим на одной стороне угла отрезок AB и равный ему отрезок BC. Проведём через точки A, B, C параллельные между собой прямые, пересекающие вторую сторону угла в точках K, L, M (рис. 1). Выполним дополнительное построение, проведя через точку K прямую, параллельную прямой AC, как показано на рис. 2, и обозначим через P и Q точки пересечения этой прямой с параллельными секущими угла.

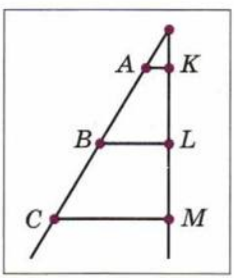


Рис. 1

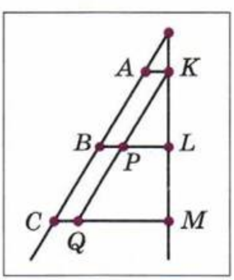


Рис. 2

Из построения следует, что четырёхугольники $ABPK$ и $BCQP$ — параллелограммы. Поэтому $KP = AB = BC = PQ$. Следовательно, точка P — середина стороны KQ треугольника KQM.

По условию прямая PL проведена параллельно прямой QM, поэтому отрезок PL является средней линией в треугольнике KQM. Значит, $KL = LM$.

Таким образом:

Если на одной стороне угла последовательно отложить два равных отрезка и через концы отрезков провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла получатся два равных между собой отрезка.

Это утверждение известно как *теорема Фалеса*.

Вопрос. Как на рис. 1 через точки A, B, C провести параллельные между собой прямые, не пересекающие вторую сторону угла?

2.2. Свойство параллельных секущих сторон угла.

Рассмотрим произвольный угол. На одной стороне угла отложим равные между собой отрезки AB, BC,

CD, DE. Проведём через точки A, B, C, D, E параллельные между собой прямые, пересекающие стороны угла соответственно в точках K, L, M, N, O (рис. 3).

Так как $AB = BC$, то из предыдущего пункта получаем равенство $KL = LM$. Аналогично получаются равенства $LM = MN$, $MN = NO$.

Нетрудно понять, что вместо четырёх равных отрезков на стороне угла можно взять любое другое число равных отрезков и провести аналогичное рассуждение. Таким образом, получаем следующее свойство параллельных секущих сторон угла.

Теорема. **Если на одной стороне угла последовательно отложить несколько равных отрезков и через концы отрезков провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла получатся столько же последовательно отложенных и равных между собой отрезков.**

Вопрос. Как показать, что для длин отрезков AD, KN, CE, MO на рис. 3 имеет место пропорция $KN : AD = MO : CE$?

2.3. Теорема о пропорциональных отрезках. В общем случае три параллельные секущие сторон угла (рис. 4) обладают следующим свойством.

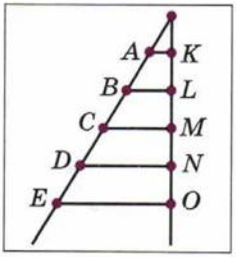


Рис. 3

Теорема. **Если через концы отрезков AB и BC, расположенных на одной стороне угла, провести параллельные секущие сторон угла, то на второй стороне угла получатся соответственные отрезки A_1B_1 и B_1C_1, длины которых пропорциональны длинам отрезков AB и BC.**

Иногда в таком случае говорят, что отрезки A_1B_1 и B_1C_1 пропорциональны отрезкам AB и BC.

Доказательство этой теоремы сложное, опирается на некоторые свойства действительных чисел, поэтому разбирать доказательство мы не будем.

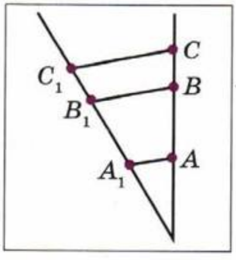


Рис. 4

Рассмотрим задачу на применение сформулированной теоремы.

Пример 1. В треугольнике ABC точка N на стороне AC и точка M на стороне BC выбраны так, что

$$AN : NC = CM : MB = 1 : 2.$$

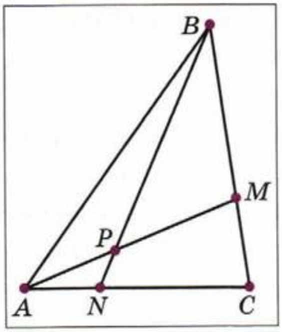


Рис. 5

Отрезки AM и BN пересекаются в точке P (рис. 5). Доказать, что $NP : PB = 1 : 6$.

Решение. Проведём через точку N прямую параллельно прямой AM, пересекающую сторону BC в точке K (рис. 6).

Так как прямые AM и NK являются параллельными секущими сторон угла ACB, то

$$\frac{MK}{KC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2},$$

откуда $KC = 2MK$, $MC = 3MK$. Из условия $CM : MB = 1 : 2$ следует, что $CM = \frac{1}{3} \cdot BC$, $BM = \frac{2}{3} \cdot BC$. Так как $MK = \frac{1}{3} \cdot MC$, то $MK = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \cdot BC\right) = \frac{1}{9} \cdot BC$.

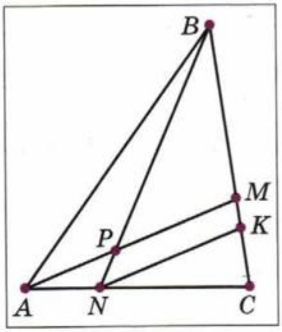


Рис. 6

Далее заметим, что прямые PM и NK являются параллельными секущими сторон угла NBC. Поэтому

$$NP : PB = KM : MB = \left(\frac{1}{9} \cdot BC\right) : \left(\frac{2}{3} \cdot BC\right) = 1 : 6,$$

что и требовалось доказать.

Вопрос. Как доказать, что в рассматриваемом примере $AP : PM = 3 : 4$?

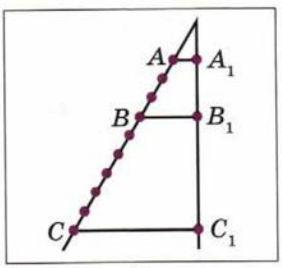


Рис. 7

2.4.* Частный случай теоремы о пропорциональных отрезках. Разберём доказательство теоремы из предыдущего пункта для случая, когда на одной стороне угла откладываются отрезки, отношение длин которых равно отношению натуральных чисел.

Пусть, например, на одной стороне угла отложены отрезки AB и BC, для которых $AB : BC = 4 : 7$. Проведём через точки A, B, C параллельные секущие, пересекающие вторую сторону угла в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 7).

Разобьём отрезок AB на 4 равные части длиной $\frac{1}{4} \cdot AB$, а отрезок BC на 7 равных частей длиной $\frac{1}{7} \cdot BC$. Так как $AB : BC = 4 : 7$, то $\frac{1}{4} \cdot AB = \frac{1}{7} \cdot BC$. В результате получаем 11 равных отрезков, отложенных на одной стороне угла.

Проведём через каждую точку деления прямую, параллельную прямой AA_1 (рис. 8). По теореме из пункта 2.2 на второй стороне угла получим 11 равных между собой отрезков.

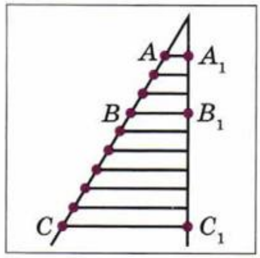


Рис. 8

Обозначим длину каждого такого отрезка через m. Тогда $A_1B_1 = 4m$, $B_1C_1 = 7m$, а поэтому $A_1B_1 : B_1C_1 = 4m : 7m = 4 : 7$. Значит, имеет место пропорция $A_1B_1 : B_1C_1 = AB : BC$. Переставив средние члены пропорции, получим $A_1B_1 : AB = B_1C_1 : BC$, что и требовалось доказать.

Вопрос. Как доказать, что в условиях теоремы данного пункта отрезки A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 пропорциональны соответственно отрезкам AB, BC, AC?

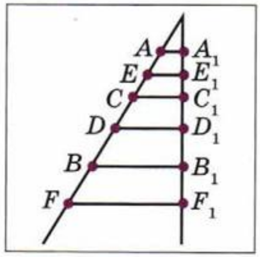


Рис. 9

2.5. Обобщение теоремы о пропорциональных отрезках.** Допустим, что на одной стороне угла расположены (рис. 9) произвольным образом отрезки AB, CD, EF и так далее. Если через концы всех отрезков проводятся параллельные между собой секущие сторон угла, то получающиеся при этом на другой стороне угла соответствующие отрезки A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1 и так далее будут пропорциональны исходным отрезкам.

Вопрос. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, параллельная AB. В каком отношении эта прямая делит стороны CA и CB?

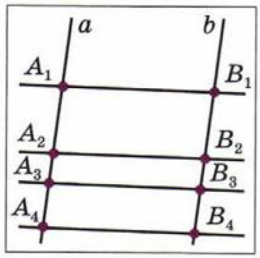


Рис. 10

2.6.* Параллельные секущие двух параллельных прямых. Теорема о пропорциональности отрезков, образованных параллельными секущими сторон угла, остаётся верной и в том случае, когда параллельные секущие пересекают две параллельные прямые.

Например, рассмотрим параллельные прямые a и b, которые пересекаются параллельными секущими так, как на рис. 10. Тогда

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4}.$$

Вопрос. Как доказать сформулированное утверждение?

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется секущей сторон угла?

2. Что означают слова «параллельные секущие сторон угла»?

3. Сформулируйте теорему Фалеса о параллельных секущих сторон угла, проходящих через концы равных отрезков, и докажите эту теорему.

4.** Сформулируйте обобщение теоремы о параллельных секущих сторон угла.

Задачи и упражнения

1. С помощью циркуля и линейки разделите заданный отрезок:

а) на 2 равные части; б) на 3 равные части;

в) на 5 равных частей; г) на 7 равных частей.

2. Дан отрезок AB. Постройте на отрезке такую точку C, что:

а) $AC : CB = 2 : 3$; б) $AC : CB = 7 : 11$; в)** $AC : CB = 1 : \sqrt{2}$.

3.* Дан отрезок AB. Постройте на продолжении отрезка точку C такую, что:

а) $AC : CB = 2 : 1$; б) $AC : CB = 1 : 2$; в) $AC : CB = 5 : 3$; г) $AC : CB = 3 : 5$.

4.* Точка B делит отрезок AC на части так, что $AB : BC = 10 : 26$. На сколько равных частей можно разбить отрезок AC, чтобы точка B была одной из точек деления?

5. Точка C расположена на отрезке AB так, что $AC : AB = 2 : 7$. Найдите отношение $BC : AC$.

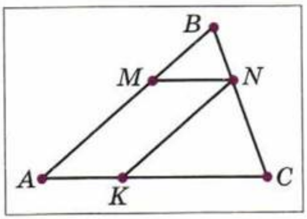


Рис. 11

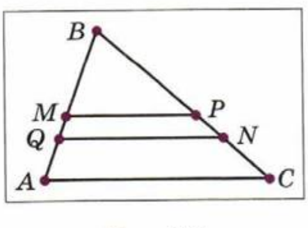


Рис. 12

6. Точки C и D расположены на отрезке AB так, что $AD : AC = 4 : 1$, $CB : CD = 4 : 1$. Найдите отношение $AC : DB$.

7. На рис. 11 точки расположены так, что $AM : MB = 3 : 2$, $MN \parallel AC$, $NK \parallel AB$. Найдите отношение $AK : KC$.

8. На рис. 12 точки расположены так, что $AM : MB = 3 : 4$, $BN : NC = 5 : 2$ и $MP \parallel NQ \parallel AC$. Найдите отношение $AM : BQ$.

9.* В треугольнике ABC выбраны точка K на стороне AB и точка L на стороне BC так, что $AK : KB = 3 : 4$, $BL : LC = 2 : 9$. Через точки K и L проводятся прямые, параллельные стороне AC и пересекающие медиану BD в точках P и Q. Найдите отношение $PQ : BD$.

10.* В треугольнике ABC выбраны точки D на стороне AB, F на стороне AC, G и H на стороне

BC так, что $AD : DB = 1 : 3$, $AC : FC = 10 : 7$ и $DH \parallel AC$, $GF \parallel AB$. Отрезки DH и FG пересекаются в точке K. Найдите отношение $DK : KH$.

11.* В треугольнике ABC выбраны точки K и L на стороне AB, M и N на стороне AC так, что $AK : KB = 3 : 1$, $AM : MC = 2 : 1$ и $NK \parallel BM$, $LM \parallel CK$. Отрезки KN и LM пересекаются в точке P. Найдите отношение $KP : PN$.

12.* В треугольнике ABC выбраны точки M на стороне AC и K на стороне AB так, что $AM : MC = 3 : 2$ и $AK : KB = 5 : 2$. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Найдите отношение $KP : PC$.

13.* В треугольнике ABC выбраны точки K на стороне AC, N на стороне BC, M и L на стороне AB так, что $AM : MB = 2 : 5$, $MN \parallel AC$, $NK \parallel AB$, $KL \parallel BC$. Найдите отношение $AB : ML$.

14.** От двух брёвен отпилили по одинаковому куску, и первое бревно стало втрое длиннее второго. После того как от них отпилили ещё раз по такому же куску, второе бревно стало короче первого в четыре раза. Во сколько раз первое бревно было длиннее второго первоначально?

15.* На рис. 13 продолжения сторон AB и CB треугольника ABC пересекаются в точках M и N прямой, параллельной прямой AC. Докажите, что отрезки AB и CB соответственно пропорциональны отрезкам MB и NB.

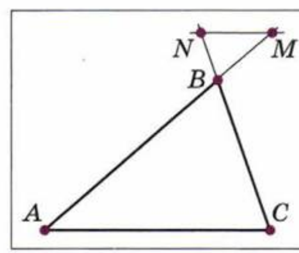


Рис. 13

16.** Постройте треугольник, если заданы три отрезка, равные его медианам.

17.* Постройте треугольник по стороне и медианам, проведённым к двум другим сторонам треугольника.

18.* Постройте треугольник по стороне и двум медианам, одна из которых проводится к данной стороне.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, параллельная AC, в треугольнике BMN проведена средняя линия, параллельная MN. В каком отношении будет разбита проведёнными отрезками сторона AB исходного треугольника, считая от вершины B?

1) $1 : 1 : 1$; 2) $1 : 1 : 2$; 3) $1 : 2 : 1$; 4) $2 : 1 : 1$.

1.2. В треугольнике ABC сторона AB разделена на семь равных частей и проведены отрезки, параллельные AC, как на рис. 14. Чему равна длина отрезка MN, если $BC = 21$ см?

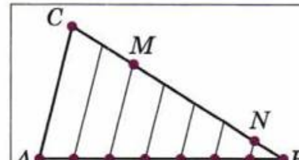


Рис. 14

1) 10 см; 2) 12 см; 3) 16 см; 4) 18 см.

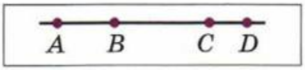


Рис. 15

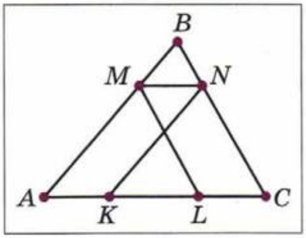


Рис. 16

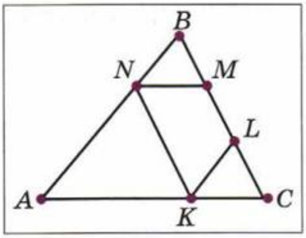


Рис. 17

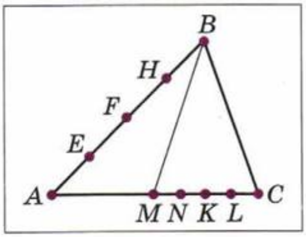


Рис. 18

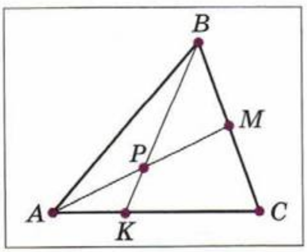


Рис. 19

1.3. Известно, что $AD : DB = 3 : 2$, $AB : BC = 3 : 5$ (рис. 15). Чему равно отношение $AC : BD$?

1) $2 : 3$; 2) $1 : 1$; 3) $3 : 4$; 4) $4 : 3$.

1.4. На одной стороне угла отложены четыре отрезка, отношение которых $12 : 42 : 60 : 24$, и через их концы проведены параллельные секущие. Чему равно отношение соответствующих отрезков, получившихся на другой стороне угла?

1) $6 : 20 : 30 : 12$; 2) $3 : 19 : 22 : 8$;
3) $4 : 14 : 20 : 8$; 4) $3 : 15 : 20 : 6$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В треугольнике ABC проводятся $MN \parallel AC$, $NK \parallel AB$ и $ML \parallel BC$ (рис. 16). Чему равно отношение $KL : AC$, если $AM : MB = 5 : 1$?

1) $2 : 5$; 2) $3 : 5$; 3) $2 : 6$; 4) $4 : 6$.

2.2. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка M и проведены отрезки $MN \parallel AC$, $NK \parallel BC$ и $KL \parallel AB$, причём известно, что отрезки MN и KL не пересекаются (рис. 17). При каких из указанных способов выбора точки M длина отрезка ML будет больше половины длины отрезка BC?

1) $BM = 0{,}1 \cdot BC$; 2) $BM = 0{,}2 \cdot BC$;
3) $BM = 0{,}3 \cdot BC$; 4) $BM = 0{,}4 \cdot BC$.

2.3. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Затем отрезки AB и MC разделены на четыре равные части каждый отмеченными на рис. 18 точками. Середины каких из указанных отрезков принадлежат прямой BM?

1) EL; 2) FL; 3) FK; 4) HN.

2.4. В треугольнике ABC со стороной $AC = 12$ см проведена медиана AM, и для заданной точки K на стороне AC находится точка P пересечения отрезков BK и AM (рис. 19). При каких способах выбора точки K длина отрезка MP будет меньше одной трети медианы AM?

1) $AK = 4$ см; 2) $AK = 5$ см;
3) $AK = 7$ см; 4) $AK = 8$ см.

§ 3. ТРАПЕЦИЯ

3.1. Определение трапеции. Рассмотрим некоторый угол. Проведём две параллельные секущие сторон угла (рис. 1). В результате получим четырёхугольник $ABCD$, который имеет особое название — *трапеция.*

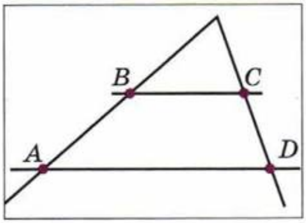


Рис. 1

Трапецией называют четырёхугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие противолежащие стороны не параллельны.

Вопрос. Как показать, что если прямая пересекает противоположные стороны параллелограмма и не проходит ни через одну из вершин, то она делит параллелограмм либо на две трапеции, либо на два параллелограмма?

3.2. Основания и боковые стороны трапеции. Параллельные стороны трапеции называют *основаниями* трапеции. На рис. 2 стороны AD и BC являются основаниями трапеции $ABCD$.

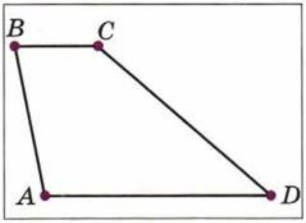


Рис. 2

Непараллельные стороны трапеции называют *боковыми сторонами* трапеции. Стороны AB и CD на рис. 2 являются боковыми сторонами трапеции.

Трапецию называют *равнобедренной,* если боковые стороны трапеции равны.

Вопрос. Как доказать, что для равнобедренного треугольника середины боковых сторон и вершины основания являются вершинами равнобедренной трапеции?

3.3. Дополнение трапеции до треугольника. Рассмотрим произвольную трапецию. Если продолжить боковые стороны трапеции, то они пересекутся в некоторой точке. Например, на рис. 3 продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке M. При этом образуются два треугольника AMD и BMC.

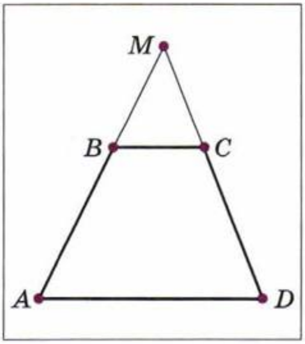


Рис. 3

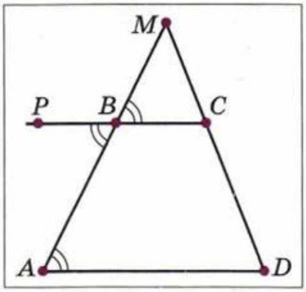


Рис. 4

Рассмотрев внутренние накрест лежащие углы DAB и PBA при параллельных прямых AD и BC (рис. 4), получим, что

$$\angle CBM = \angle PBA = \angle BAD.$$

Аналогично получается равенство

$$\angle BCM = \angle ADC.$$

Таким образом, при продолжении боковых сторон трапеции образуются два треугольника с соответственно равными углами.

Вопрос. Как доказать, что если углы при основании трапеции равны, то трапеция равнобедренная?

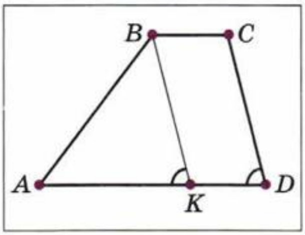


Рис. 5

3.4. Разбиение трапеции на треугольник и параллелограмм. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с меньшим основанием BC. Проведём через вершину B прямую, параллельную стороне CD. Эта прямая пересечёт основание AD в точке K, отличной от точек A и D. При этом образуются треугольник ABK и параллелограмм $BCDK$ (рис. 5).

Из свойств параллелограмма получаем, что $KD = BC$, $\angle AKB = \angle ADC$. Таким образом, сторона AK треугольника ABK равна разности $AD - BC$, углы треугольника ABK при этой стороне равны соответственным углам трапеции $ABCD$ при основании AD.

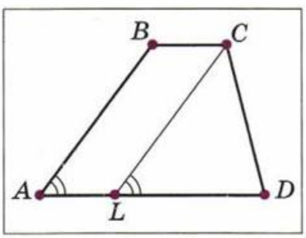


Рис. 6

Аналогично: если через вершину C провести прямую параллельно стороне AB, то образуется параллелограмм $ABCL$ и треугольник CDL (рис. 6).

Вопрос. Как доказать, что если для одной и той же трапеции провести прямые BK и CL, как указано на рис. 5 и 6, то получающиеся треугольники ABK и LCD равны?

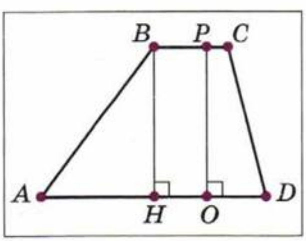


Рис. 7

3.5. Высота трапеции. Проведём в трапеции $ABCD$ из вершины B перпендикуляр BH (рис. 7). Отрезок BH имеет длину, равную расстоянию между параллельными основаниями трапеции, и является одной из *высот* трапеции. Отрезок OP (рис. 7) также является высотой трапеции $ABCD$.

Вопрос. Вершинами какого четырёхугольника являются концы двух различных высот трапеции?

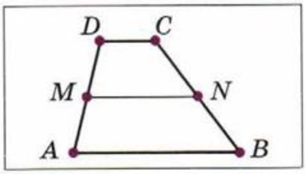


Рис. 8

3.6. Теорема о средней линии трапеции. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называют *средней линией трапеции*.

На рис. 8 отрезок MN является средней линией трапеции $ABCD$.

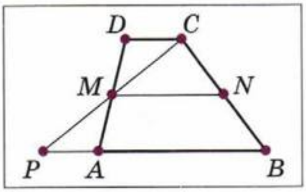


Рис. 9

Докажем основные свойства средней линии трапеции.

Теорема. **Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме оснований.**

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD и средней линией MN (рис. 8).

Проведём через вершину C и середину M боковой стороны AD прямую до пересечения с прямой AB в точке P (рис. 9).

Треугольники MCD и MPA равны, так как у них $DM = MA$ по условию, углы DMC и AMP равны как вертикальные, а углы MDC и MAP равны как внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей AD с параллельными прямыми AB и CD.

Из равенства треугольников MCD и MPA следует равенство их соответственных сторон: $MC = MP$ и $DC = AP$. Поэтому в треугольнике PBC основание PB равно сумме оснований трапеции $ABCD$, а отрезок MN является средней линией этого треугольника.

По свойству средней линии треугольника получаем, что отрезок MN параллелен прямой PB и

$$MN = \frac{1}{2} \cdot PB = \frac{1}{2}(PA + AB) = \frac{1}{2}(CD + AB).$$

Вопрос. Сколько в трапеции можно провести средних линий?

3.7. Формула площади трапеции. Возьмём трапецию $ABCD$. Разобьём её диагональю BD на два треугольника ABD и BCD и проведём высоты BH и DP (рис. 10). Тогда отрезок BH является высотой треугольника ABD, проведённой к стороне AD, отрезок DP является высотой

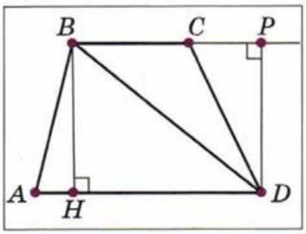


Рис. 10

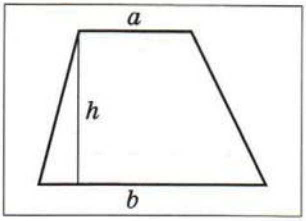


Рис. 11

треугольника BCD, проведённой к стороне BC, и $BH = DP$ как высоты одной трапеции.

Площадь S трапеции равна сумме площадей треугольников ABD и BCD. Поэтому

$$S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DP =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Обозначим длины оснований трапеции и её высоту буквами a, b и h соответственно, как отмечено на рис. 11. Тогда полученное для площади трапеции значение запишется в виде формулы:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h.}$$

Эту формулу можно прочитать так.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований трапеции на её высоту.

Вопрос. Как показать, что площадь трапеции равна произведению высоты трапеции на длину её средней линии?

Контрольные вопросы и задания

1. Какой четырёхугольник называют трапецией?

2. Какие стороны трапеции называют её основаниями?

3. Что такое высота трапеции?

4. Какую трапецию называют равнобедренной?

5. Как трапецию можно дополнить до треугольника?

6. Как трапецию разбить на параллелограмм и треугольник?

7. Как определяется средняя линия трапеции?

8. Сформулируйте теорему о средней линии трапеции. Докажите эту теорему.

9. По какой формуле можно вычислять площадь трапеции?

Задачи и упражнения

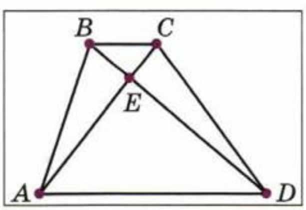


Рис. 12

1. На рис. 12 в трапеции $ABCD$ проведены диагонали, пересекающиеся в точке E. Докажите, что углы треугольников BCE и DAE соответственно равны.

2. Докажите, что равнобедренная трапеция симметрична относительно прямой, проходящей через середины оснований.

3.** На рис. 13 точки M и N расположены на боковых сторонах трапеции $ABCD$ так, что $AM : MB = DN : NC$. Докажите, что $MN \parallel AD$.

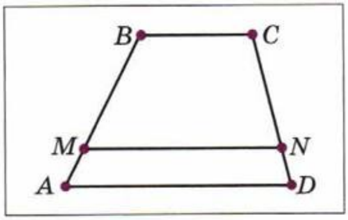


Рис. 13

4.* Докажите, что если диагонали трапеции равны, то трапеция равнобедренная.

5.** На рис. 14 боковая сторона трапеции разделена на три равные части и из точек деления проведены отрезки, параллельные основаниям трапеции. Найдите длины этих отрезков, если $AD = 5$ м, $BC = 2$ м.

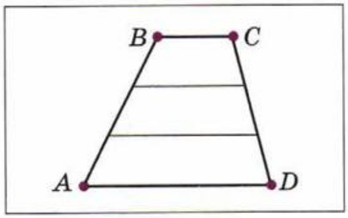


Рис. 14

6. В равнобедренной трапеции высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание трапеции на отрезки 6 см и 15 см. Найдите основания трапеции.

7. В равнобедренной трапеции большее основание равно 7 см, угол при основании равен 60°, боковая сторона равна 3,2 см. Найдите меньшее основание трапеции.

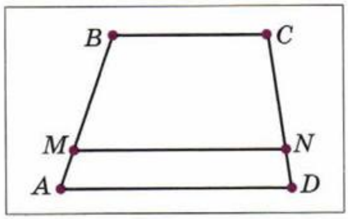


Рис. 15

8.* Постройте трапецию по основанию, одному из углов при основании и боковым сторонам.

9.** Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

10.** Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

11.** Постройте трапецию по основанию, высоте, проведённой к основанию, и диагоналям.

12.** Постройте трапецию по разности оснований, боковым сторонам и одной диагонали.

13. Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из её оснований на 4 см больше другого. Найдите основания трапеции.

14. На рис. 15 отрезок MN параллелен основаниям трапеции, его длина равна 11 см, и $AM : MB = 1 : 3$. Найдите основания трапеции, если $AD : BC = 3 : 2$.

15.* В параллелограмме $ABCD$ проводится биссектриса угла BAD, которая пересекает сторону DC в точке E. Найдите длину средней линии трапеции $ABED$, если $AB = 78$ мм, $AD = 42$ мм.

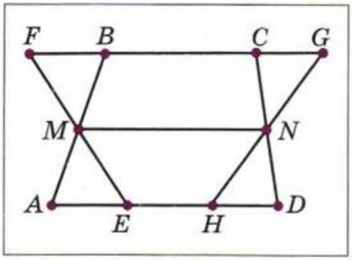


Рис. 16

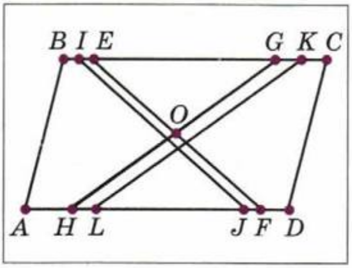


Рис. 17

16.* На рис. 16 трапеции $ABCD$ и $FGHE$ имеют общую среднюю линию, а их основания лежат на двух параллельных прямых. Найдите длину средней линии трапеции $AFGD$, если известно, что $AH = 99$ см, $EH = 46$ см, $BC = 21$ см, $BG = 42$ см.

17.** На рис. 17 в параллелограмме $ABCD$ отрезки EF и GH проходят через точку O пересечения диагоналей параллелограмма, точка I — середина BE, точка K — середина GC и $IJ \parallel EF$, $KL \parallel GH$. Найдите длину отрезка LJ, если известно, что $AD = 110$ мм, $BG = 89$ мм, $AF = 81$ мм.

18. В равнобедренной трапеции основания 51 см и 69 см, боковая сторона 41 см. Найдите площадь трапеции.

19. В равнобедренной трапеции основания 42 см и 54 см, угол при основании 45°. Найдите площадь трапеции.

20. Трапеция делится диагональю на два треугольника. Найдите площади этих треугольников, если основания трапеции 35 см и 29 см, а её площадь 256 см^2.

21. В трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине C известны основание $BC = 15$ см и боковые стороны $AB = 17$ см, $CD = 8$ см. Найдите площадь трапеции.

22. Основания трапеции равны 12 см и 36 см. Найдите, в каком отношении делит площадь трапеции её средняя линия.

23.* Основания трапеции равны a и b. В каком отношении делит площадь трапеции её средняя линия?

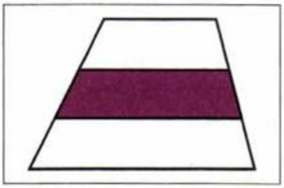


Рис. 18

24.* Диагонали трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников ABP и CDP равны.

25.* Прямые, параллельные основаниям трапеции, делят боковую сторону на три равные части. Докажите, что площадь средней заштрихованной на рис. 18 части равна $\frac{1}{3}$ от площади всей трапеции.

26.** Каждая сторона трапеции разделена на три равные части и точки деления соединены так, как на рис. 19. Докажите, что площадь центральной заштрихованной части равна $\frac{1}{9}$ от площади всей трапеции.

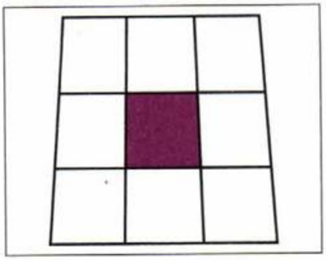


Рис. 19

27.** В круге радиуса R по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды длиной R и $R\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции, основаниями которой являются эти хорды.

28.** Середина M боковой стороны AB трапеции $ABCD$ соединена с вершинами противоположной боковой стороны (рис. 20). Докажите, что площадь треугольника MCD равна половине площади трапеции.

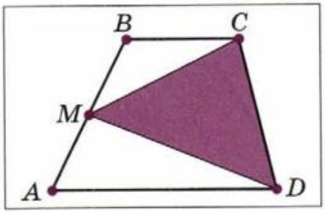


Рис. 20

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 32$ см и $BC = 18$ см провели отрезки BK и CL так, что $BK \parallel CL$ (рис. 21). Чему равна сумма длин отрезков AK и DL?

1) 9 см; 2) 11 см; 3) 14 см; 4) 16 см.

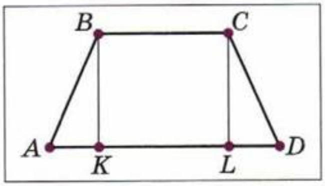


Рис. 21

1.2. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 17$ см и $BC = 12$ см провели отрезок BM параллельно стороне CD (рис. 22). Чему равен периметр этой трапеции, если известно, что периметр треугольника ABM равен 18 см?

1) 42 см; 2) 43 см; 3) 44 см; 4) 45 см.

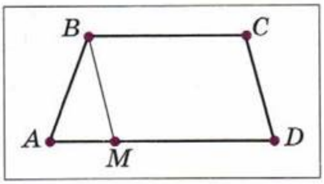


Рис. 22

1.3. В трапеции длина средней линии равна 4,8 см, а отношение оснований равно 3 : 5. Чему равна длина меньшего из оснований этой трапеции?

1) 2,8 см; 2) 3,2 см; 3) 3,6 см; 4) 4 см.

1.4. Чему в равнобедренном треугольнике с основанием 4 см и боковой стороной 5 см равна высота, проведённая к основанию треугольника?

1) $\sqrt{5^2 - 4^2}$ см; 2) $\sqrt{5^2 - 2^2}$ см; 3) $\sqrt{5^2 + 2^2}$ см; 4) $\sqrt{5^2 + 4^2}$ см.

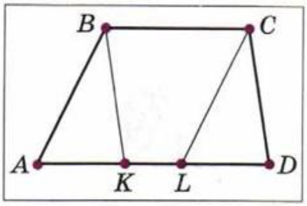


Рис. 23

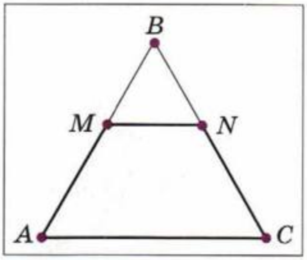


Рис. 24

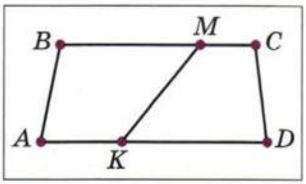


Рис. 25

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В трапеции $ABCD$ большее основание AD имеет длину 19 см. Через вершину B параллельно стороне CD проводится отрезок BK и через вершину C параллельно стороне AB проводится отрезок CL (рис. 23). В каких из приведённых случаев выбора длины основания BC отрезки BK и CL не имеют общей точки?

1) $BC = 12$ см; 2) $BC = 10$ см;
3) $BC = 8$ см; 4) $BC = 6$ см.

2.2. При каких из указанных значений a и m существует трапеция с одним из оснований, равным a, и средней линией, равной m?

1) $a = 3$ см, $m = 7$ см;
2) $a = 9$ см, $m = 8$ см;
3) $a = 11$ см, $m = 5$ см;
4) $a = 2$ см, $m = 3$ см.

2.3. В равностороннем треугольнике ABC со стороной 12 см проводится отрезок MN, параллельный стороне AC, и получается трапеция $AMNC$ с равными боковыми сторонами (рис. 24). При каких значениях MN периметр трапеции $AMNC$ будет меньше 30 см?

1) $MN = 4$ см; 2) $MN = 6$ см;
3) $MN = 8$ см; 4) $MN = 10$ см.

2.4. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ см, $BC = 10$ см на основаниях выбираются точки M и K (рис. 25). В каких из приведённых случаев площадь трапеции $ABMK$ будет больше половины площади трапеции $ABCD$?

1) $AK = 7$ см, $BM = 5$ см; 2) $AK = 4$ см, $BM = 6$ см;
3) $AK = 8$ см, $BM = 3$ см; 4) $AK = 6$ см, $BM = 7$ см.

Глава 10

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

В этой главе мы напомним свойства прямой пропорциональной зависимости. Вы познакомитесь с понятием функции, узнаете, какие функции называются линейными, научитесь строить графики линейных функций. В главе вводится понятие арифметической прогрессии и изложены некоторые её свойства.

§ 1. ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

1.1. Формула прямой пропорциональности. Напомним определение прямой пропорциональности двух переменных величин.

При *постоянной* скорости движения V, измеряемой в километрах в час, пройденный путь S в километрах может быть вычислен по формуле:

$$S = V \cdot t.$$

Если, например, скорость $V = 5$ км/ч, то

$$S = 5 \cdot t.$$

Рассматриваемая зависимость обладает важной особенностью. Если для любого времени $t > 0$ составим отношение $S : t$, то такое отношение всегда равно 5. Это видно из составленной таблицы.

Таблица

t ч	2	3	3,2	4	4,6	6	100
S км	10	15	16	20	23	30	200
$S : t$	5	5	5	5	5	5	5

Аналогичные зависимости мы рассматривали в 6 классе и называли прямой пропорциональностью.

Переменная величина y, зависящая от переменной величины x, прямо пропорциональна величине x, если при любом $x \neq 0$ для соответствующего значения y отношение $y : x$ равно одному и тому же ненулевому числу k, а значению $x = 0$ соответствует значение $y = 0$.

Число k называют *коэффициентом пропорциональности.*

С помощью коэффициента пропорциональности зависимость величины y, прямо пропорциональной величине x, можно выразить формулой

$$y = k \cdot x.$$

Вопрос. Какие примеры прямо пропорциональных величин вы знаете?

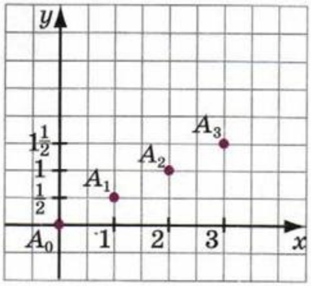


Рис. 1

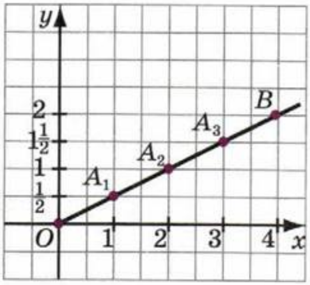


Рис. 2

1.2. Изображение прямой $y = kx$ на координатной плоскости. Пусть величина y прямо пропорциональна величине x, то есть $y = kx$, где k — фиксированное ненулевое число. Посмотрим, как расположены на координатной плоскости точки с координатами $(x; y)$, для которых $y = kx$.

Пусть, например, $k = \frac{1}{2}$. Тогда $y = \frac{1}{2}x$. Для $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ соответствующие значения величины y будут $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 1$, $y_3 = \frac{3}{2}$. Точки $A_0(0; 0)$, $A_1\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $A_2(2; 1)$, $A_3\left(3; \frac{3}{2}\right)$ расположены так, как показано на рис. 1. Нетрудно заметить, что все эти точки расположены на одной прямой, проходящей через начало координат. Если взять ещё какое-нибудь значение x и вычислить $y = \frac{1}{2}x$, то точка $(x; y)$ также попадёт на проведённую прямую. Например, при $x = 4$ получается точка $B(4; 2)$, изображённая на рис. 2.

В общем случае имеет место следующее свойство.

На координатной плоскости множество всех точек вида $(x; kx)$, где k — фиксированное число, есть прямая.

Вопрос. На какой прямой лежат точки с координатами $(x; kx)$ при $k = 0$?

1.3. Точки графика прямой пропорциональной зависимости в правой полуплоскости.** Пусть Γ — график уравнения $y = kx$ при $k > 0$. Координаты точки $O(0,0)$ являются решением уравнения $y = kx$ и поэтому точка O принадлежит графику Γ.

Отметим на координатной плоскости точку $A(1; k)$ и проведём прямую OA (рис. 3).

Покажем сначала, что все точки луча OA являются частью графика Γ уравнения $y = kx$.

Для этого возьмём на луче OA точку $B(c; d)$, не совпадающую с началом системы координат $O(0; 0)$ (рис. 3). Из точек A и B опустим перпендикуляры на координатную ось Ox (рис. 4). Эти перпендикуляры параллельны, поэтому по теореме о пропорциональности отрезков из п. 2.3

главы 9 получаем пропорцию $\frac{OB}{OA} = \frac{c}{1}$. Аналогично, опустив из точек A и B перпендикуляры на координатную ось Oy (рис. 4), по той же теореме получаем пропорцию $\frac{OB}{OA} = \frac{d}{k}$. Следовательно, $\frac{d}{k} = \frac{c}{1}$ и $d = kc$. Поэтому координаты $(c;\ d)$ точки B являются решением уравнения $y = kx$.

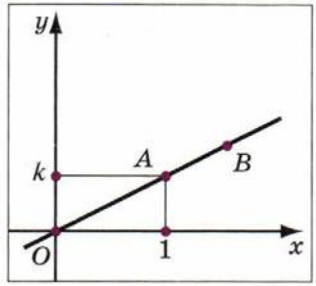


Рис. 3

Таким образом, каждая точка луча OA принадлежит графику Γ уравнения $y = kx$.

Правой полуплоскостью назовём полуплоскость, каждая точка которой имеет неотрицательную абсциссу. Покажем теперь, что все точки графика Γ уравнения $y = kx$, содержащиеся в правой полуплоскости, расположены на луче OA.

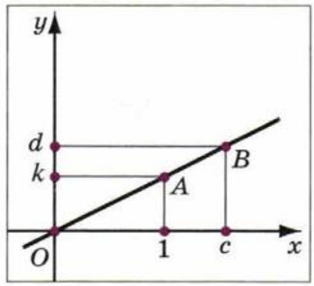


Рис. 4

Для этого выберем произвольно точку $C(f;\ g)$, для которой $f > 0$ и которая не принадлежит лучу OA. Проведём через точку C прямую, перпендикулярную оси Ox. Обозначим через D точку пересечения этой прямой с лучом OA (рис. 5).

Координаты точки D удовлетворяют уравнению $y = kx$. Абсцисса точки D равна f, поэтому ордината точки D равна kf.

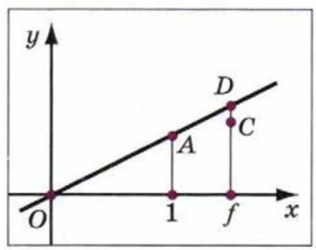


Рис. 5

Точка D отлична от точки C, абсциссы этих точек равны между собой, поэтому ординаты точек D и C различны, то есть g не равно kf.

Следовательно, точка $C(f;\ g)$ не принадлежит графику уравнения $y = kx$.

Другими словами, все точки графика Γ уравнения $y = kx$, лежащие в правой полуплоскости, расположены на луче OA. Таким образом, все точки графика уравнения $y = kx$, содержащиеся в правой полуплоскости, — это все точки луча OA.

Вопрос. Какой вид имеет график уравнения $3x = y$?

1.4. График прямой пропорциональной зависимости.** В предыдущем пункте показано, что для графика Γ уравнения $y = kx$ при $k > 0$ частью графика Γ в правой полуплоскости является луч OA, где $A(1;\ k)$. Левой полуплоскостью назовём полуплоскость, каждая точка которой имеет неположительную абсциссу.

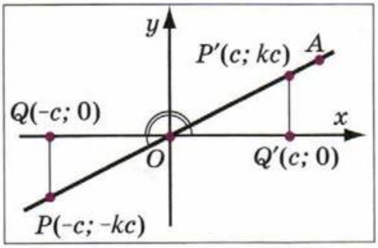


Рис. 6

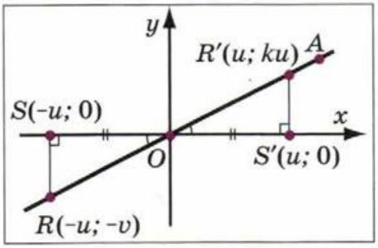


Рис. 7

Пусть $c > 0$. В левой полуплоскости рассмотрим точку $P(-c; -kc)$, принадлежащую графику $Г$ уравнения $y = kx$ и отметим точку $P'(c; kc)$, также принадлежащую графику $Г$ уравнения $y = kx$ (рис. 6). Как было доказано в предыдущем пункте, точка P' лежит на луче OA.

Пусть Q и Q' — основания перпендикуляров, проведённых соответственно из точек P и P' к оси Ox (рис. 6). Заметим, что $|OQ| = |-c| = |c| = |OQ'|$, $|PQ| = |-kc| = |kc| = |P'Q'|$.

Отсюда следует, что прямоугольные треугольники OPQ и $OP'Q'$ равны по двум катетам. Поэтому $\angle POQ = \angle P'OQ'$.

Далее, $\angle P'OQ = 180° - \angle P'OQ'$ и $\angle POQ + \angle P'OQ = 180°$. Следовательно, точки P, O и P' лежат на одной прямой, и эта прямая — OA.

Точка P расположена на луче OP, противоположном лучу OA. Таким образом, все точки графика $Г$ уравнения $y = kx$, расположенные в левой полуплоскости, принадлежат лучу, противоположному лучу OA.

Покажем, что всякая точка луча, противоположного лучу OA, принадлежит графику $Г$ уравнения $y = kx$. Для этого на прямой OA возьмём точку $R(-u; -v)$, где $u > 0$, $v > 0$, и точку $R'(u; ku)$ (рис. 7).

Пусть S и S' — основания перпендикуляров, проведённых соответственно из точек R и R' к оси Ox (рис. 7). Заметим, что $|OS| = |-u| = |u| = |OS'|$, $\angle ROS = \angle R'OS'$ и прямоугольные треугольники ORS и $OR'S'$ равны по катету и острому углу. Поэтому $|RS| = |R'S'|$. Однако $|RS| = |-v| = v$ и $|R'S'| = ku$. Отсюда $v = ku$ и $-v = k(-u)$. Следовательно, точка R является точкой графика $Г$ уравнения $y = kx$. Тем самым все точки луча, противоположного лучу OA, принадлежат графику $Г$ уравнения $y = kx$.

Таким образом, все точки графика уравнения $y = kx$, содержащиеся в левой полуплоскости, — это все точки луча, противоположного лучу OA.

В результате рассмотрений предыдущего и этого пунктов показано:

на координатной плоскости график уравнения $y = kx$, где k — фиксированное положительное число, есть прямая, проходящая через начало системы координат и точку $(1; k)$.

Вопрос. Какой вид имеет график уравнения $y = kx$ при $k = 0$?

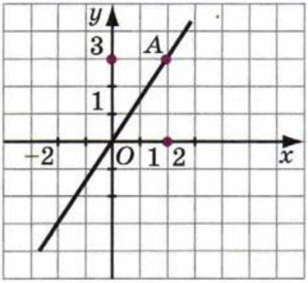


Рис. 8

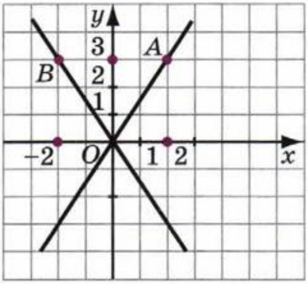


Рис. 9

1.5. Симметричность графиков $y = kx$ и $y = -kx$ относительно оси Oy. Сравним графики уравнений $y = 1{,}5x$ и $y = -1{,}5x$.

График уравнения $y = 1{,}5x$ есть прямая, проходящая через точки $O(0;\ 0)$ и $A(2;\ 3)$ (рис. 8). Рассмотрим точку $B(-2;\ 3)$, симметричную точке A относительно оси Oy. Точка B расположена на графике уравнения $y = -1{,}5x$, потому что при $x = -2$ получаем $y = -1{,}5 \cdot (-2) = 3$. Точка $O(0;\ 0)$ также расположена на этом графике. Зная, что графиком уравнения $y = -1{,}5x$ является прямая, получаем, что график этого уравнения — прямая OB, симметричная относительно оси Oy прямой OA (рис. 9).

Обратно, если возьмём точку $C(-1;\ 1{,}5)$, расположенную на графике уравнения $y = -1{,}5x$, то точка $D(1;\ 1{,}5)$, симметричная точке C относительно оси Oy, расположена на графике уравнения $y = 1{,}5x$.

В общем случае:

графики уравнений $y = -kx$ и $y = kx$ симметричны относительно оси Oy.

Вопрос. Как показать, что графики уравнений $y = -kx$ и $y = kx$ симметричны относительно оси Ox?

1.6. Симметрия графиков уравнений $y = kx$ и $y = -kx$.** Возьмём произвольную точку M графика уравнения $y = kx$. Её координаты имеют вид $(a;\ ka)$. Координаты точки N, симметричной точке M относительно оси Ox, имеют вид $(a;\ -ka)$. Поэтому точка N принадлежит графику уравнения $y = -kx$.

Справедливо и обратное: всякая точка $P(b;\ -kb)$ графика уравнения $y = -kx$ симметрична относительно оси Ox точке $Q(b;\ kb)$ графика уравнения $y = kx$.

Таким образом, графики уравнений $y = -kx$ и $y = kx$ симметричны относительно оси Ox.

Симметрия относительно оси является перемещением плоскости, поэтому при симметрии относительно прямой каждая прямая переходит в прямую.

В пунктах 1.3 и 1.4 было доказано, что при $k > 0$ графиком уравнения $y = kx$ является прямая. При симметрии относительно оси Ox этот график переходит в график уравнения $y = -kx$. Поэтому графиком уравнения $y = -kx$ также является прямая.

Вопрос. Как показать, что графики уравнений $y = -kx^2$ и $y = kx^2$ симметричны относительно оси Ox?

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое пропорция?

2. Сформулируйте основное свойство пропорции.

3. Какие переменные величины называют прямо пропорциональными?

4. Что такое коэффициент пропорциональности?

5. Что называют графиком прямой пропорциональной зависимости?

6. Что называют графиком уравнения $y = kx$, где k — фиксированное число?

7.** Как доказать, что графиком прямой пропорциональной зависимости является прямая?

8. Какой график имеет зависимость, заданная формулой $y = 0 \cdot x$?

9. Как построить график прямой пропорциональной зависимости?

10. Как связаны между собой графики уравнений $y = kx$ и $y = -kx$?

11. Что такое перемещение плоскости?

Задачи и упражнения

1. Зная, что величина y изменяется прямо пропорционально величине x, заполните таблицу:

а)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y					10					

б)

x	1,5		0,3		6		9	4,5		
y		8		1,2		14	6		100	0,4

в)

x		2	0,4		14		3,2		0,03	
y	2,8	14		49		7		3,5		1,05

2. Рост ребёнка в зависимости от возраста изменялся следующим образом:

Возраст, год	1	2	3	4	5
Рост, см	70	80	90	95	100

Почему нельзя утверждать, что рост ребёнка прямо пропорционален его возрасту?

3. Известно, что в одном литре молока 200 граммов сливок. Сколько сливок:

а) в двухлитровой банке с молоком;

б) в трёхлитровой банке с молоком;

в) в 10 двухлитровых банках с молоком;

г) в 12 трёхлитровых и 8 двухлитровых банках с молоком?

4. Определите, какие из пар точек лежат на одной прямой, проходящей через начало системы координат:

а) (3; 2) и (−9; −6); б) (−4; 7) и (−7; 4);

в) (1,2; −3,6) и (−5; 15); г) (0,02; 0,03) и (−5;−7,5);

д) (5,3; 4,2) и (5,2; 4,1); е) (124; −456) и (−124; 457).

5. Начертите графики уравнений:

а) $y = 1{,}5x$; б) $y = -1{,}5x$; в) $y = -x$; г) $y = -\frac{1}{2}x$;

д) $y = 2 \cdot \frac{1}{2}x$; е) $y = \frac{1}{3}x$; ё) $y = -\frac{1}{3}x$.

6. Постройте в каждом пункте в одной и той же системе координат графики уравнений:

а) $y = x$; $y = 2x$; $y = 3x$; $y = \frac{1}{2}x$; $y = \frac{2}{3}x$;

б) $y = -x$; $y = -2x$; $y = -3x$; $y = -\frac{1}{2}x$; $y = -\frac{2}{3}x$;

в) $y = x$; $y = -x$; $y = 3x$; $y = -\frac{1}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x$;

7. Скорость автомобиля 40 км/ч. Начертите график зависимости пройденного пути от времени.

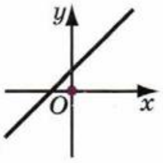
Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

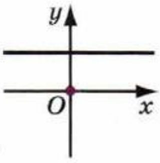
1.1. Какое из уравнений задаёт прямую пропорциональную зависимость?

1) $y = x + 3$; 2) $y = 3 - x$; 3) $y = 3 \cdot x$; 4) $y = 3 : x$.

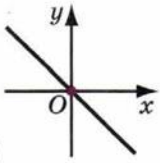
1.2. Какой из рисунков является графиком прямой пропорциональной зависимости y от x?



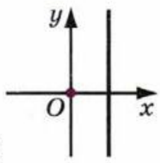
1)



2)



3)



4)

1.3. Значения переменной y связаны со значениями x прямой пропорциональной зависимостью, причём $y = 6$ при $x = 4$. Чему равен коэффициент пропорциональности?

1) 6; 2) 4; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$.

1.4. Значения переменной y связаны со значениями x прямой пропорциональной зависимостью. Чему равно y при $x = 2$, если $y = 2$ при $x = 6$?

1) 6; 2) 3; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какая пара точек лежит на прямой, проходящей через начало координат?

1) (3; 2); 2) (2; 3); 3) (9; 8); 4) (−6; −4).

2.2. Какие три из приведённых четырёх точек лежат на одной прямой, проходящей через начало координат?

1) (1,2; 2,8); 2) (1,4; 3,2); 3) (−0,6; −1,4); 4) (−1,5; −3,5).

2.3. Автомобиль двигается с постоянной скоростью. Какие из приведённых утверждений верны?

1) скорость автомобиля прямо пропорциональна времени движения;

2) пройденный путь прямо пропорционален времени движения;

3) время движения прямо пропорционально пройденному пути;

4) пройденный путь прямо пропорционален скорости автомобиля.

2.4. Прямая пропорциональная зависимость задана формулой $y = \frac{7}{5}x$. Какие из приведённых утверждений верны?

1) $y = 7$ при $x = 5$; 2) $y = 4{,}2$ при $x = 3$;

3) $y = 1{,}2$ при $x = 1$; 4) $y = -2{,}8$ при $x = -2$.

§ 2. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

2.1. Определение линейной функции. *Прямолинейной зависимостью переменной y от переменной x* называется зависимость, при которой для каждого значения x соответствующее значение y вычисляется по формуле

$$y = kx + b,$$

где k и b — фиксированные числа.

Пример 1. При $k = 2$ и $b = 3$ формула $y = kx + b$ принимает вид $y = 2x + 3$.

Пример 2. При $k = 4$ и $b = -3$ формула $y = kx + b$ принимает вид $y = 4x - 3$.

Пример 3. При $k = -3$ и $b = 0$ формула $y = kx + b$ принимает вид $y = -3x$.

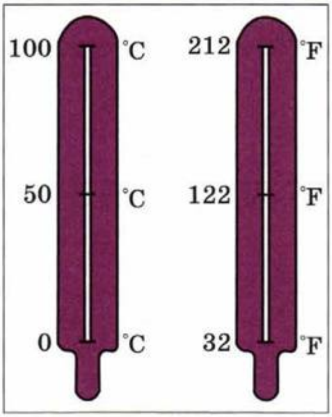
В этом случае получаем прямую пропорциональную зависимость переменной y от переменной x.

Аналогично при $b = 0$ и любом $k \neq 0$ формула $y = kx + b$ принимает вид $y = kx$. Следовательно, прямая пропорциональная зависимость является частным случаем прямолинейной зависимости.

Иногда прямолинейная зависимость переменной y от переменной x называется *линейной функцией* от x.

Вопрос. Какой вид имеет линейная функция при $k = 0$ и $b = -5$?

2.2.* Пример линейной функции. В России привычным является измерение температуры в градусах по Цельсию (°C). В некоторых странах принято измерять температуру в градусах по Фаренгейту (°F).



Сравним значения одной и той же температуры в градусах по Цельсию и по Фаренгейту. Известно, что температура замерзания воды соответствует 0 °C и 32 °F, а температура кипения воды соответствует 100 °C и (32 + 180) °F. Это значит, что для измерения температуры по Фаренгейту промежуток от 0 °C до 100 °C делится на 180 равных частей, начальной из этих отметок соответствует 32 °F, следующей за ней отметке соответствует 33 °F и так далее.

Следовательно, если x °C соответствует y °F, то значения из промежутка от 32 °F до y °F пропорциональны значениям из промежутка от 0 °C до x °C с коэффициентом k, который можно найти, зная, что 180 °F соответствуют 100 °C. Поэтому $k = \dfrac{180}{100} = 1{,}8$. Значит, $\dfrac{y - 32}{x - 0} = 1{,}8$; откуда $y - 32 = 1{,}8x$; $y = 32 + 1{,}8x$.

Получаем, что зависимость числового значения температуры F в градусах по Фаренгейту от числового значения температуры C в градусах по Цельсию выражается линейной функцией $F = 32 + 1{,}8C$.

Вопрос. Какой температуре в градусах по Цельсию °C соответствует температура −40 °F в градусах по Фаренгейту?

2.3. Изображение прямолинейной зависимости на координатной плоскости. Рассмотрим прямолинейную зависимость $y = 2x + 3$.

Графиком Γ этой зависимости называют график уравнения $y = 2x + 3$, то есть множество всех точек вида $M(a; 2a + 3)$ с координатами $(a; 2a + 3)$, где a — любое число.

Выбирая несколько значений x, мы можем составить таблицу соответствующих значений $y = 2x + 3$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1
y	-5	-3	-1	1	3	5

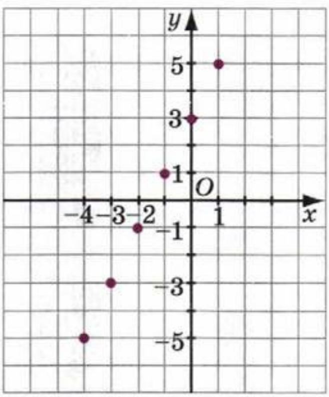


Рис. 1

Используя таблицу, отметим точки с соответствующими координатами (рис. 1).

Глядя на этот рисунок, естественно предположить, что графиком линейной функции $y = 2x + 3$ является прямая. Эта прямая проходит через отмеченные точки графика (рис. 2).

В общем случае имеет место утверждение.

Графиком линейной функции $y = kx + b$, где k и b — фиксированные числа, является прямая.

Эта прямая проходит через любые две различные точки графика.

Пример 4. Если $k \neq 0$, $b \neq 0$, то график функции $y = kx + b$ проходит через точки $(0; b)$ и $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$, лежащие на координатных осях.

Пример 5. Если $k = 0$, то график функции $y = kx + b$ проходит через точки $(0; b)$, $(1; b)$.

Пример 6. Если $k \neq 0$, $b = 0$, то график функции $y = kx + b$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; k)$.

Иногда прямую, являющуюся графиком уравнения $y = kx + b$, называют *прямой* $y = kx + b$.

Вопрос. Какие точки графика линейной функции $y = 3 - 2x$ лежат на координатных осях?

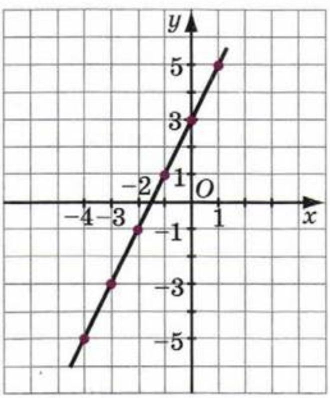


Рис. 2

2.4. Построение графика линейной функции по двум различным точкам. Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая. Отсюда следует, что для построения этого графика достаточно определить две различные его точки и провести через них прямую.

Пример 7. Построить график функции $y = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x$.

Сначала вычислим $y(1) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot 1 = 1$ и отметим точку $A(1; 1)$. Затем вычислим $y(5) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot 5 = 0$ и отметим точку $B(5; 0)$. Прямая AB на рис. 3 является графиком функции $y = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x$.

Вопрос. Какой график имеет линейная функция $y = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x$?

2.5. Построение графика линейной функции по точкам пересечения с осями координат. Иногда для построения графика линейной функции удобно находить точки пересечения графика с осями координат.

Например, график функции $y = 2x - 4$ можно построить так. Сначала вычислим $y(0) = -4$ и отметим точку $M(0; -4)$. Затем составим и решим уравнение $y = 0$, то есть $2x - 4 = 0$, найдём его корень $x = 2$ и отметим точку $N(2; 0)$. Графиком функции $y = 2x - 4$ является прямая MN (рис. 4).

Вопрос. Какой вид имеет линейная функция, график которой проходит через точки $A(-1; -3)$ и $B(2; 0)$?

2.6. Параллельность прямых $y = kx + b$ и $y = kx$. Покажем, что графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая, которая параллельна прямой $y = kx$. Пусть, например, $y = 5x - 2$. Если предположить, что прямые $y = 5x - 2$ и $y = 5x$ пересекаются в какой-то точке с координатами $(m; n)$, то тогда одновременно должны выполняться равенства $5m - 2 = n$ и $5m = n$, откуда $5m - 2 = 5m$, что невозможно.

Так как предположение о существовании точки пересечения прямых $y = 5x - 2$ и $y = 5x$ приводит к противоречию, то тем самым доказана параллельность этих прямых (рис. 5).

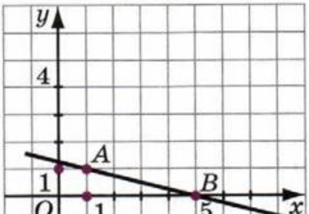


Рис. 3

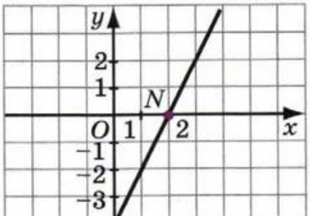


Рис. 4

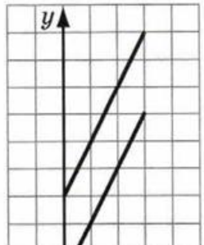


Рис. 5

Аналогичные рассуждения можно провести и в общем случае.

Вопрос. Как доказать, что графики линейных функций $y = 5x - 3$ и $y = 5x + 4$ параллельны?

2.7. Угловой коэффициент прямой $y = kx + b$. На рис. 6 изображены прямые — графики функций $y = 2x + 4$, $y = 2x + 2$, $y = 2x$, $y = 2x - 2$.

Для прямой $y = 2x + 4$ обозначим через A точку её пересечения с осью Ox, через B — любую точку оси Ox, расположенную правее точки A, через C — любую точку прямой $y = 2x + 4$, расположенную в верхней полуплоскости относительно оси Ox. Тогда угол BAC называется *углом наклона* прямой $y = 2x + 4$ (рис. 7).

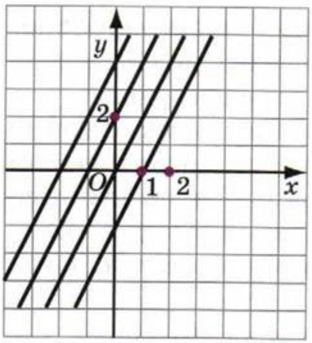


Рис. 6

Аналогично для каждой прямой $y = kx + b$, где k и b — фиксированные числа, обозначим через A точку её пересечения с осью Ox, через B — любую точку оси Ox, расположенную правее точки A, через C — любую точку прямой $y = kx + b$, расположенную в верхней полуплоскости относительно оси Ox. Тогда угол BAC называется *углом наклона* прямой $y = kx + b$.

Например, на рис. 8, 9, 10 соответственно изображены углы наклона прямых $y = 2x + 2$, $y = 2x$, $y = 2x - 2$.

Из пункта 2.6 следует, что прямые $y = 2x + 4$, $y = 2x + 2$, $y = 2x$, $y = 2x - 2$ параллельны. Поэтому их углы наклона равны (рис. 7, 8, 9, 10).

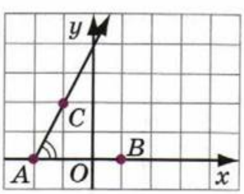


Рис. 7

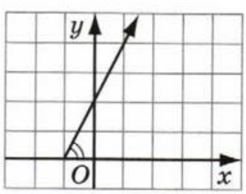


Рис. 8

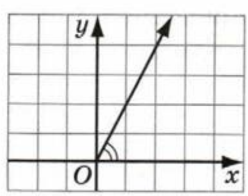


Рис. 9

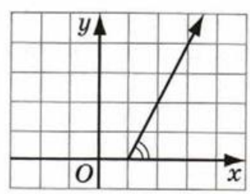


Рис. 10

Следовательно, число $k = 2$ в формуле $y = kx + b$ линейной функции характеризует угол наклона прямой $y = kx + b$ к положительному направлению оси Ox. По этой причине число k в формуле $y = kx + b$ называют *угловым коэффициентом прямой* $y = kx + b$.

Число b в формуле $y = kx + b$ называют *свободным членом*.

При отрицательных значениях k угол наклона прямой $y = kx + b$ получается тупым. Например, тупым является угол наклона прямой $y = -x + 3$ (рис. 11).

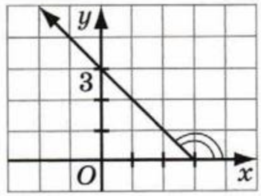


Рис. 11

Вопрос. Как построить график линейной функции, зная одну точку этого графика и угловой коэффициент?

2.8. О графике уравнения $y = kx + b$.** Возьмём на координатной плоскости прямую $y = -kx$ и на этой прямой точку $A(c; d)$, где $d = -kc$ (рис. 12). Через точку оси Oy с координатой $\frac{b}{2}$ проведём горизонтальную прямую $y = \frac{b}{2}$, параллельную оси Ox.

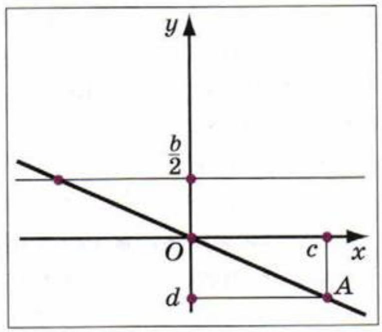


Рис. 12

Построим прямую a, симметричную прямой $y = -kx$ относительно оси $y = \frac{b}{2}$ (рис. 13).

Обозначим $(c; f)$ координаты точки B, симметричной точке $A(c; -kc)$ относительно оси $y = \frac{b}{2}$.

Пусть D — точка пересечения прямой AB с осью симметрии $y = \frac{b}{2}$. Точка D является серединой отрезка AB и имеет координаты $\left(c; \frac{b}{2}\right)$ (рис. 14). Отсюда следует, что на оси Oy число $\frac{b}{2}$ является координатой середины отрезка с концами в точках с координатами d и f.

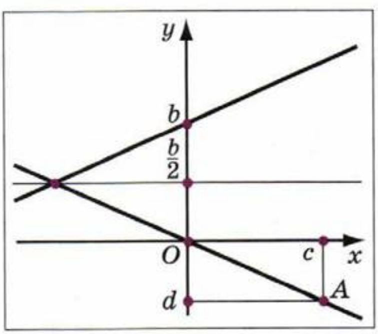


Рис. 13

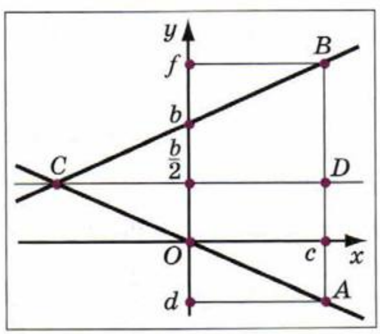


Рис. 14

С другой стороны, в 6 классе было показано, что на числовой оси середина отрезка с концами в точках с координатами d и f имеет координату $(d + f)$. Поэтому выполняются равенства $\frac{b}{2} = (d + f)$, $f = b - d = b - (-kc)$ и $f = kc + b$. Следовательно, точка B, симметричная точке A прямой $y = -kx$, расположена на графике уравнения $y = kx + b$.

Обратно, взяв любую точку $(x_0; y_0)$ графика уравнения $y = kx + b$, то есть точку $(x_0; kx_0 + b)$, заметим, что при симметрии относительно оси $y = \frac{b}{2}$ в неё переходит точка прямой $y = -kx$, имеющая координаты $(x_0; -kx_0)$.

Тем самым доказано утверждение.

Графиком уравнения $y = kx + b$, где k, b — фиксированные числа, является прямая.

Вопрос. Какие координаты имеет точка пересечения прямой $y = -kx$ и прямой $y = kx + b$, где k отлично от нуля?

2.9. Связь между графиками линейных функций и уравнениями с двумя неизвестными. Графики линейных функций помогают наглядно представить все решения линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пример 8. Найти все решения уравнения $2x - 4y = 3$.

Прибавим к обеим частям уравнения выражение $4y$:

$$2x = 4y + 3.$$

Прибавим к обеим частям этого уравнения число -3:

$$2x - 3 = 4y.$$

Поменяем местами правую и левую части уравнения:

$$4y = 2x - 3.$$

Разделим обе части на ненулевое число 4:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{4}.$$

В результате элементарных преобразований приходим к уравнению, которое равносильно исходному уравнению.

Решениями уравнения $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ являются пары $(c; d)$, для которых верно равенство $d = \frac{1}{2}c - \frac{3}{4}$. Таким образом, все решения начального уравнения — это пары вида $\left(c; \frac{1}{2}c - \frac{3}{4}\right)$, где c принимает любое значение.

Множество таких пар является графиком линейной функции $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Этот график можно построить, если отметить точки $A\left(0; -\frac{3}{4}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ и провести прямую AB (рис. 15).

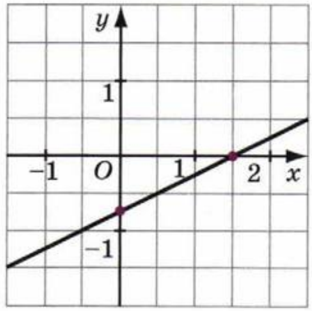


Рис. 15

Вопрос. Какие решения имеет уравнение $4y - 2x + 3 = 0$?

2.10. Линейное уравнение с нулевым коэффициентом.** В главе 6 мы рассматривали уравнения с двумя переменными $0 \cdot x + y = 2$ и $x + 0 \cdot y = 2$. В первом случае решением уравнения являются пары вида $(x; 2)$, где x может принимать любое значение. Множество таких пар является графиком функции $y = 2$ (рис. 16).

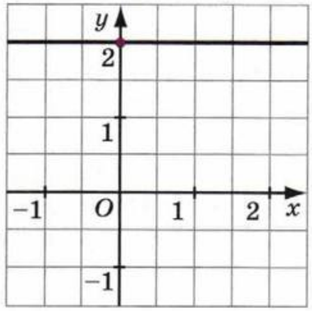


Рис. 16

Во втором случае решением уравнения являются пары вида $(2; y)$, где y может принимать любое значение. Все точки вида $(2; y)$ образуют на координатной плоскости вертикальную прямую, изображённую на рис. 17.

Заметим, что для любого числа a графиком уравнения $x + 0 \cdot y = a$ является вертикальная прямая, которая не будет графиком никакой линейной функции.

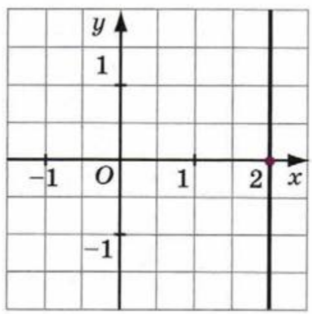


Рис. 17

Вопрос. При каких значениях переменной x определено значение переменной $y = kx + b$, где k, b — заданные числа?

2.11. Решение линейных уравнений с помощью графиков. С помощью графиков корни линейных уравнений можно представить наглядно.

Пример 9. Найти корень уравнения

$$2 - x = 2x + 6.$$

Построим график функции $y = 2 - x$ (рис. 18).

Построим график функции $y = 2x + 6$ (рис. 19).

Совместим оба графика на рис. 20. Отметим точку A пересечения этих графиков. Если точка A имеет координаты $A(a; b)$, то для чисел a и b

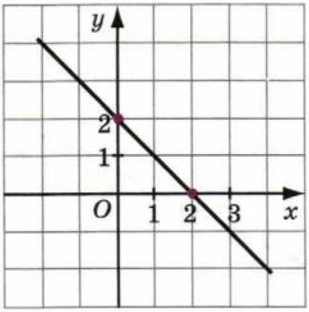


Рис. 18

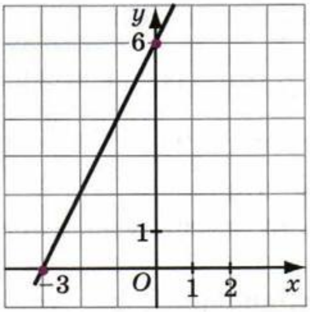


Рис. 19

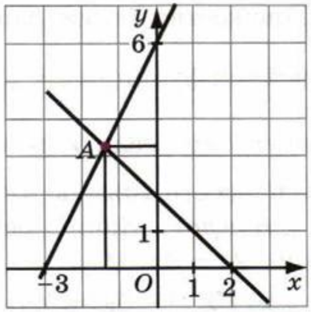


Рис. 20

выполняются равенства $b = 2 - a$ и $b = 2a + 6$. Отсюда получаем равенство $2 - a = 2a + 6$, то есть абсцисса a точки A является корнем уравнения $2 - x = 2x + 6$.

Из рассмотрения рис. 20 можно сказать, что искомый корень находится между числами $-1{,}4$ и $-1{,}2$.

Вопрос. Как можно получить более точные границы снизу и сверху для корня рассматриваемого уравнения?

Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется линейной?

2. Какой график имеет линейная функция?

3.** Как доказать, что графиком линейной функции является прямая?

4. Как построить график линейной функции?

5. Что такое угол наклона прямой к оси Ox?

6. Как определяется угловой коэффициент прямой?

7. Каким свойством обладают прямые с одинаковым угловым коэффициентом?

Задачи и упражнения

1. Постройте график линейной функции:

а) $y = 1 + x$; б) $y = -2x + 2$; в) $y = 2x + 4$;

г) $y = -\frac{1}{2}x + 1$; д) $y = -\frac{1}{2}x - 1$; е) $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}$.

2. Постройте графики уравнений:

а) $3x + y = 0$; б) $2x + 3y = 0$; в) $4x - y = 0$;

г) $3x + y = 1$; д) $2x + 3y = \frac{1}{2}$; е) $4x - y = 2$.

3.* Пусть C обозначает число градусов по шкале Цельсия, а F обозначает соответствующее число градусов по шкале Фаренгейта.

а) Переведите в градусы по Фаренгейту: -5 °C, 20 °C, 80 °C, -50 °C, 36 °C;

б) переведите в градусы по Цельсию: 9 °F, 30 °F, -15 °F, 300 °F, -50 °F;

в) постройте график зависимости °F от °C;

г) постройте график зависимости °C от °F.

4.* Для измерения температуры по Кельвину в °K нулевой отметке 0 °C на шкале Цельсия ставится в соответствие 273 °K, а промежутку температуры в 1 °C соответствует 1 °K.

а) запишите формулу для перевода °C в °K;

б) запишите формулу для перевода °K в °C.

5. Дана линейная функция $y = 2x + 3$. При каких значениях независимой переменной x значение переменной y равно:

а) 1; б) 2; в) -1; г) -3; д) 4; е) 6?

6. Найдите значение k, если известно, что график линейной функции $y = kx + 1$ проходит через точку:

а) $(-2;-5)$; б) $(1; 7)$; в) $(10;-4)$.

7. Найдите значение b, если известно, что график линейной функции $y = -2x + b$ проходит через точку:

а) $(5; -2)$; б) $(-2; -1)$; в) $(-3; 1)$.

8. Найдите с помощью графиков приближённое значение корня уравнения:

а) $2x = 2$; б) $-x = \frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}x = 2$; г) $-\frac{1}{3}x = 0{,}03$; д) $0{,}8x = 0{,}2$.

9. Найдите с помощью графиков приближённое значение корня уравнения:

а) $3 - 2x = 0$; б) $3x - 2 = 0$; в) $2x + 3 = 0$;

г) $-1{,}5x + 3 = 0$; д) $\frac{1}{3}x - 2 = 0$; е) $\frac{3}{8} - \frac{1}{4}x = 0$.

10. Найдите с помощью графиков приближённое значение корня уравнения:

а) $3x - 4 = 6 - 2x$; б) $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{3}x + 3$;

в) $2 - x = 2x - 3$; г) $x - 2 = x + 1$.

11.** Решите уравнение:

а) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$; б) $\frac{3x-5}{x+6} + \frac{11}{4} = 0$;

в) $\frac{4}{2x-3} = \frac{6}{x-5}$; г) $\frac{7x+2}{8x-3} = \frac{16}{13}$.

12.* При каких значениях параметра a уравнение $a^2x = x$ имеет бесконечное множество решений?

13.** Решите относительно x уравнение:

а) $ax + 2 = 2x + 1$; б) $3x + 5 = 2a$; в) $ax = 4$;
г) $a^2x = 4x + 2$; д) $ax = a^2x$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое значение принимает линейная функция $y = 2x - 3$ при $x = 3{,}5$?

1) 3,5; 2) 4; 3) 4,5; 4) 5.

1.2. Начиная с 18 ч температура воздуха на улице изменяется по закону $T = 24° - (t - 18) \cdot 2°$, где t — время в часах. Какой будет температура воздуха в 23 ч?

1) 10°; 2) 12°; 3) 14°; 4) 16°.

1.3. Пусть зависимость y от x задаётся линейной функцией $y = kx + 2$. Чему равно k, если $y = 3$ при $x = 2$?

1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 2.

1.4.* Пусть зависимость y от x задаётся линейной функцией $y = ax + b$. Чему равно a, если $y = 1$ при $x = 1$ и $y = 3$ при $x = 2$?

1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 8.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из точек лежат на прямой $y = 1{,}2x - 3{,}4$?

1) (1; 2,2); 2) (5; 2,6); 3) (0; –3,4); 4) (3; 0,2).

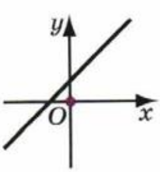
2.2.* Какие три из приведённых точек лежат на одной прямой?

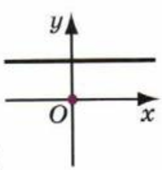
1) (1; 2); 2) (2; 4); 3) (3; 3); 4) (7; 5).

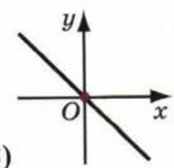
2.3. Какие из приведённых зависимостей являются прямолинейными?

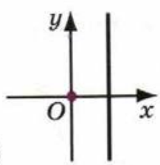
1) $y = x + 3$; 2) $y = 3 - x$; 3) $y = 3 \cdot x$; 4) $y = 3 : x$.

2.4. Какие из приведённых рисунков являются графиками прямолинейных зависимостей y от x?

1) 

2) 

3) 

4) 

§ 3. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

3.1. Значение линейной функции при натуральных значениях переменной. Рассмотрим линейную функцию, например, $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Последовательно вычислим значения этой функции при натуральных значениях $x = k$ и обозначим через a_k значение $y = \frac{1}{2}k + 2$. Тогда

$$a_1 = \frac{3}{2}; \quad a_2 = 3; \quad a_3 = \frac{7}{2}; \quad a_4 = 4$$

и так далее.

В результате появляется последовательность чисел, расположенных в таком порядке:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots\ .$$

Число a_1 называют *первым членом* этой последовательности, число a_2 называют вторым членом, число a_3 называют третьим членом и так далее. Число a_n называют *n-м членом* этой последовательности.

На координатной плоскости точки $(n;\ a_n)$, где n — произвольное натуральное число, лежат на графике линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 2$ (рис. 1).

Заметим, что разности $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ и так далее все равны одному и тому же числу $d = \frac{1}{2}$.

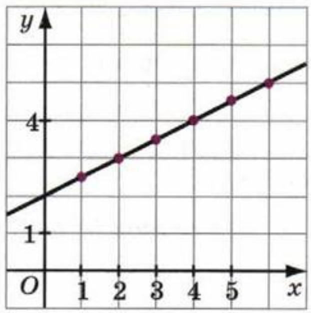


Рис. 1

Полученная последовательность

$$\frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \dots$$

является примером *арифметической прогрессии*.

Вопрос. Какая арифметическая прогрессия получится, если рассмотреть последовательность значений линейной функции $y = x - 5$ при натуральных значениях x?

3.2. Определение арифметической прогрессии.

Арифметической прогрессией называется последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n \dots,$$

для которой разности $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, ..., $a_n - a_{n-1}$, ... равны одному и тому же числу.

Таким образом, в арифметической прогрессии, начиная со второго члена, разность между каждым членом и предшествующим ему членом равна одному и тому же числу. Это число называют *разностью* арифметической прогрессии и обычно обозначают буквой d.

Для выяснения, является ли данная последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

арифметической прогрессией, достаточно убедиться, что разность между каждым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом постоянна.

Пример 1. Рассмотрим последовательность, n-й член которой вычисляется по формуле

$$a_n = \frac{3+4n}{5},\ \text{где } n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots .$$

Для этой последовательности

$$a_2 - a_1 = \frac{3+4\cdot 2}{5} - \frac{3+4\cdot 1}{5} = \frac{4(2-1)}{5} = \frac{4}{5};$$

$$a_3 - a_2 = \frac{3+4\cdot 3}{5} - \frac{3+4\cdot 2}{5} = \frac{4(3-2)}{5} = \frac{4}{5};$$

$$a_{n-1} - a_n = \frac{3+4(n+1)}{5} - \frac{3+4n}{5} = \frac{4(n+1-n)}{5} = \frac{4}{5}.$$

Получаем, что разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n и равна $\frac{4}{5}$. Следовательно, последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{3+4n}{5}$, является арифметической прогрессией с разностью $d = \frac{4}{5}$.

Вопрос. Как доказать, что последовательность, n-й член которой вычисляется по формуле $a_n = (n+1)^2 - n^2$, является арифметической прогрессией?

3.3. Формула для n-го члена арифметической прогрессии. Рассмотрим арифметическую прогрессию, у которой известны первый член a_1 и разность d.

Из определения арифметической прогрессии следует:

$$a_2 - a_1 = d,$$

откуда

$$a_2 = a_1 + d = a_1 + (2-1)\cdot d;$$
$$a_3 - a_2 = d,$$

откуда

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d = a_1 + (3-1)\cdot d;$$
$$a_4 - a_3 = d,$$

откуда

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d = a_1 + (4-1)\cdot d$$

и так далее.

В результате приходим к формуле

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Полученную формулу иногда называют *формулой общего члена* арифметической прогрессии.

Вопрос. Как доказать, что члены арифметической прогрессии -3, 1, 5, 9, 13, 17, ... можно получить как значения некоторой линейной функции $y = kx + b$, последовательно вычисленные для натуральных значений переменной x?

3.4. Формула суммы первых *n* натуральных чисел. Рассмотрим арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1$, то есть последовательность натуральных чисел

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots .$$

Запишем и вычислим сумму первых пяти членов этой прогрессии:

$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

Для наглядности представим слагаемые как площади прямоугольников шириной 1 и высотами 1, 2, 3, 4, 5 и изобразим их так, как на рис. 2. Тогда сумма S_5 получится равной площади фигуры, изображённой на рис. 2. Возьмём две такие фигуры и составим из них прямоугольник, как на рис. 3. Стороны полученного прямоугольника равны 5 и 6, а поэтому его площадь равна $5 \cdot 6$. Отсюда следует, что площадь фигуры на рис. 2 равна $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6$. Поэтому

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6$$

или

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6.$$

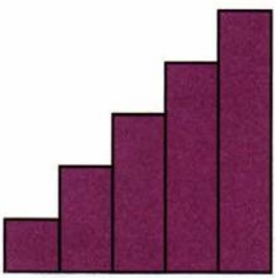


Рис. 2

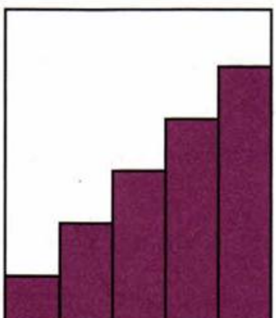


Рис. 3

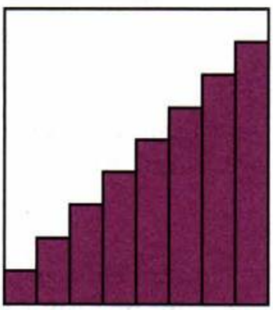


Рис. 4

Аналогичные рассуждения можно провести и для вычисления суммы любого числа начальных членов рассматриваемой последовательности. Например, при $n = 8$ сумма $S_8 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8$ равна половине площади прямоугольника со сторонами 8 и 9, как это можно видеть на рис. 4. Следовательно,

$$S_8 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9.$$

В общем случае для произвольного натурального числа n имеет место формула

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Формула остаётся верной и при $n = 1$, когда вместо суммы рассматривается только одно число 1.

Вопрос. Чему равна сумма первых $n - 1$ натуральных чисел?

3.5. Формула суммы членов арифметической прогрессии. Рассмотрим сумму нескольких начальных, последовательно расположенных, членов арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d.

Иногда эту сумму для краткости называют суммой начальных членов арифметической прогрессии, а в случае, если это не вызывает недоразумений — суммой первых членов арифметической прогрессии.

Пусть S_n обозначает сумму n начальных членов этой прогрессии. Тогда последовательно имеем:

$S_1 = a_1$;

$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + d) = 2a_1 + 1 \cdot d$;

$S_3 = (a_1 + a_2) + a_3 = (2a_1 + 1 \cdot d) + (a_1 + 2d) = 3a_1 + (1 + 2)d$;

$S_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 = (3a_1 + (1 + 2)d) + (a_1 + 3d) = 4a_1 + (1 + 2 + 3)d$

и так далее.

В результате для любого натурального значения n получаем равенство

$$S_n = na_1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1))d.$$

Из формулы (1) предыдущего пункта для любого натурального числа n получаем, что

$$\boldsymbol{S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.}$$

Таким образом, зная первый член и разность арифметической прогрессии, по этой формуле для любого натурального числа n, большего 1, можно вычислить сумму n первых членов арифметической прогрессии.

Отметим, что для $n = 1$ эта формула также имеет место.

Пример 2. Найти сумму

$$S = 99 + 96 + 93 + \ldots + (-54) + (-57) + (-60),$$

в которой в порядке убывания записаны все целые числа от 99 до −60, делящиеся на 3.

Обозначим слагаемые в порядке их следования: $a_1 = 99$, $a_2 = 96$, $a_3 = 93$ и так далее. Тогда $a_2 - a_1 = -3$, $a_3 - a_2 = -3$ и так далее. Отсюда следует, что последовательность чисел a_1, a_2, a_3, ... является арифметической прогрессией с первым членом $a_1 = 99$ и разностью $d = -3$.

Найдём номер n последнего слагаемого (−60) в нашей сумме. По формуле для общего члена арифметической прогрессии имеем $-60 = a_1 + (n-1)d$ или $-60 = 99 + (n-1)\cdot(-3)$, откуда $n = 54$.

Подставляя в формулу для суммы начальных членов арифметической прогрессии значения $a_1 = 99$, $d = -3$ и $n = 54$, находим

$$S = S_{54} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot d = 54\cdot 99 + \frac{54\cdot 53}{2}\cdot(-3) =$$

$$= 27\cdot(99\cdot 2) - 27\cdot(53\cdot 3) = 27\cdot(198 - 159) = 27\cdot 39 = 1053.$$

Пример 3. Вычислить сумму всех натуральных нечетных чисел от 1 до 199 включительно.

Обозначим первое нечётное число 1 через a_1. Второе нечётное число a_2 имеет вид $a_2 = 3 = a_1 + 2$, третье нечётное число a_3 имеет вид $a_3 = 5 = a_2 + 2$ и так далее: если a_k — k-е нечётное число, то нечётное число a_{k+1} имеет вид $a_{k+1} = a_k + 2$. Таким образом, натуральные нечётные числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью прогрессии $d = 2$.

Найдём теперь, какой номер s имеет в этой прогрессии число 199, используя формулу общего члена арифметической прогрессии: $a_s = 1 + (s-1)\cdot 2 = 199$. Отсюда $s = 100$.

Подставляя в формулу суммы членов арифметической прогрессии значения первого члена прогрессии, её разности и числа слагаемых, получаем:

$$S = S_{100} = 100\cdot 1 + \frac{100\cdot 99}{2}\cdot 2 = 100 + 100\cdot 99 = 100^2.$$

Таким образом, сумма первых 100 нечётных чисел равна 100^2.

Вопрос. Как показать, что для любого натурального числа n сумма первых n нечётных чисел равна n^2?

Контрольные вопросы и задания

1. Какие примеры последовательностей вы знаете?

2. Какую последовательность называют арифметической прогрессией?

3. По какой формуле можно вычислить n-й член арифметической прогрессии?

4.** Как доказать формулу общего члена арифметической прогрессии?

5. Чему равна сумма первых n натуральных чисел?

6. По какой формуле можно вычислить сумму n начальных членов арифметической прогрессии?

Задачи и упражнения

1. Запишите семь начальных членов последовательности с общим членом a_n:

а) $a_n = n + 3$; б) $a_n = 1 - 0{,}1n$;

в) $a_n = 3 + \frac{1}{3}n$; г) $a_n = 3n - 5$;

д)** $a_n = 3\sqrt{2} - \sqrt{2n}$; е)** $a_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}$.

2. Докажите, что последовательность x_n, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, является арифметической прогрессией, если:

а) $x_n = (3n - 4) - (2n + 5)$; б) $x_n = (2n + 1)^2 - (2n - 1)^2$;

в)* $x_n = (n + 1)^3 - n^2(n + 3)$; г)* $x_n = 4n^2 - (2n - 3)^2$;

д)** $x_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - \frac{n^2}{2}$.

3. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии с общим членом a_n, если известно, что:

а) $a_2 = 3$, $a_4 = 6$; б) $a_5 = -2$, $a_9 = 8$;

в) $a_3 = 6$, $a_{33} = 66$; г) $a_{49} = 11$, $a_{99} = 36$;

д)* $a_n = 3n - 1$, $a_{2n} = 6n - 1$.

4. Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел:

а) начиная с 19 до 99 включительно;

б) начиная со 100 до 999 включительно;

в) начиная со 123 до 1234 включительно;

г)* начиная с m до n включительно, где $m < n$.

5.** Найдите:

а) $(2 \cdot 1 + 3) + (2 \cdot 2 + 3) + \ldots + (2 \cdot 100 + 3)$;

б) $(3 \cdot 20 - 6) + (3 \cdot 21 - 6) + \ldots + (3 \cdot 30 - 6)$;

в) $(0{,}1 \cdot 5 + 1) + (0{,}1 \cdot 6 + 1) + \ldots + (0{,}1 \cdot 55 + 1)$.

6. Найдите сумму n начальных членов арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d, если:

а) $a_1 = 3$; $d = 2$; $n = 11$; б) $a_1 = -1$; $d = 3$; $n = 15$;

в) $a_1 = -0{,}4$; $d = 0{,}1$; $n = 100$; г) $a_1 = 15$; $d = -\frac{3}{2}$; $n = 26$;

д) $a_1 = 7$; $d = -5$; $n = 18$; е) $a_1 = 3{,}2$; $d = -0{,}6$; $n = 11$;

ё) $a_1 = 3$; $d = 0$; $n = 16$.

7.** Докажите, что если S_m, S_n и S_{m+n} — суммы соответственно m, n и $m + n$ начальных членов одной арифметической прогрессии, то

$$(m + n)(S_m - S_n) = (m - n)S_{m+n}.$$

8.* Известно, что сумма всех нечётных натуральных чисел, меньших 100, равна 50^2. Как можно найти:

а) сумму всех чётных чисел, меньших чем 101;

б)* сумму всех натуральных чисел, меньших чем 101;

в)** сумму всех натуральных чисел, меньших чем 51?

9.* Найдите сумму:

$$S = -1^2 + 3^2 - 5^2 + 7^2 - \ldots + 95^2 - 97^2 + 99^2.$$

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен 10-й член арифметической прогрессии, если $a_1 = 3$ и $d = 2$?

1) 17; 2) 19; 3) 21; 4) 22.

1.2. Чему равна сумма первых 8 членов арифметической прогрессии с общим членом $a_n = 2 + \frac{3}{2}(n - 1)$?

1) 56; 2) 58; 3) 60; 4) 62.

1.3. Чему равна разность арифметической прогрессии с общим членом $a_n = \frac{5n + 3}{3}$?

1) 3; 2) 5; 3) $\frac{5}{3}$; 4) $\frac{3}{5}$.

1.4.** Общий член арифметической прогрессии задаётся формулой $a_n = 3n - 1$. Чему равна сумма первых 10 членов прогрессии с нечётными номерами?

1) 125; 2) 170; 3) 215; 4) 290.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из приведённых наборов чисел, записанных в указанном порядке, являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии?

1) $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; $a_4 = 7$; $a_5 = 9$;

2) $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 9$; $a_4 = 27$;

3) $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = 5$; $a_5 = 8$; $a_6 = 11$;

4) $a_1 = 1$; $a_2 = 11$; $a_3 = 21$; $a_4 = 31$; $a_5 = 41$.

2.2. Какие из приведённых последовательностей с членами a_n, где $n = 1, 2, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями?

1) $a_n = n$; 2) $a_n = n^2$; 3) $a_n = 2^n$; 4) $a_n = (n + 2)^2 - n^2$.

2.3. Какие из приведённых чисел являются членами арифметической прогрессии с общим членом $a_n = 2 + \frac{1}{3}n$?

1) 1; 2) 9; 3) $3\frac{1}{2}$; 4) $4\frac{1}{3}$.

2.4. Какие из приведённых последовательностей с членами a_n, где $n = 1, 2, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями?

1) $a_n = 2$; 2) $a_n = \frac{2}{n}$; 3) $a_n = 2n$; 4) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$.

§ 4. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

4.1. Постоянные и переменные величины. С каждым объектом или явлением окружающего нас мира связано множество самых разнообразных величин.

Некоторые из них всегда равны одним и тем же значениям. Например, температура кипения воды при нормальных условиях равна +100 °C. В то же время объём наливаемой в чайник воды может быть различным в разные моменты времени.

Величины, которые не изменяются, называются *постоянными*; величины, которые принимают различные значения, называются *переменными*.

Все значения, которые может принимать переменная величина, называются её *областью допустимых значений*.

При нормальных условиях температура воды может выражаться значением от 0 до 100 °C, потому что при температуре ниже 0 °C вода замерзает и превращается в лёд, а при температуре +100 °C она закипает и начинает превращаться в пар. Поэтому область допустимых значений температуры воды, измеренной в градусах Цельсия, составляют все числа от 0 до 100.

Разные величины могут иметь разные области значений.

Вопрос. Что можно сказать о величине, область допустимых значений которой содержит единственное значение?

4.2. Функциональная зависимость. Один из главных вопросов, возникающих при изучении любого явления, состоит в отыскании взаимосвязей между переменными величинами, которые это явление характеризуют.

Во многих случаях изменение одной из величин вызывает определённые изменения других величин. В подобных случаях рассматриваемые величины называются *зависимыми*.

Если для двух переменных x и y существует вполне определённое правило, позволяющее по каждому значению x однозначно определить соответствующее значение y, то зависимость переменной y от переменной x называется *функциональной*.

Пример 1. Пусть переменная величина y прямо пропорциональна переменной величине x. Тогда найдётся такое фиксированное число k, что $y = kx$. Тем самым указано вполне определённое правило, позволяющее по каждому значению x однозначно определить соответствующее значение y, то есть зависимость переменной y от переменной x является функциональной.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $y = 2x + 3$. График этого уравнения состоит из всех точек, координаты которых имеют вид $(a; 2a + 3)$, где a — любое число. Сопоставив значению первой координаты однозначно определённое значение второй координаты, получим функциональную зависимость переменной y от переменной x.

Эта функциональная зависимость называется линейной функцией.

Пример 3. Рассмотрим арифметическую прогрессию, n-й элемент которой вычисляется по формуле $a_n = \dfrac{3 + 4n}{5}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Тем самым каждому натуральному числу n однозначно сопоставляется число $a_n = \dfrac{3 + 4n}{5}$.

В этом примере получаем функциональную зависимость переменной a_n от переменной n, область значений которой — все натуральные числа.

Вопрос. Будет ли зависимость пройденного расстояния от скорости движения функциональной зависимостью, если время движения постоянно?

4.3. Терминология и обозначения. Пусть для двух переменных x и y зависимость переменной y от переменной x является функциональной. В этом случае переменная x называется *независимой* переменной или *аргументом* этой функциональной зависимости, а переменная y — *зависимой* переменной.

Часто функциональную зависимость переменной y от переменной x называют *функцией*.

В дальнейшем понятие функции будет уточнено.

Задать функцию — значит указать, какие действия нужно произвести с аргументом x, чтобы получить соответствующее значение y. Равенством

$$y = f(x).$$

указывают, что значения зависимой переменной y находят по значениям аргумента x с помощью некоторого правила, обозначаемого через f.

Иногда это правило задаётся с помощью таблицы или формулы, при этом для каждого значения a из области значений аргумента функции через $f(a)$ символически обозначается значение зависимой переменной, соответствующее a. Число $f(a)$ называют значением функции $y = f(x)$ для значения аргумента, равного a.

Для обозначения переменных величин можно использовать вместо x и y другие буквы, например, u и v. Точно так же для обозначения правила вместо f можно использовать другие буквы, например, g, φ и так далее.

Вопрос. Как выглядит формула $S = f(a)$, где S — площадь равностороннего треугольника со стороной, равной a?

4.4. График функции. Наглядное представление о функции даёт её график.

Графиком функции (функциональной зависимости) $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых имеют вид $(a; f(a))$.

Абсцисса каждой точки графика функции $y = f(x)$ принадлежит области значений аргумента, ордината равна соответствующему значению зависимой переменной.

Примерами графиков функций могут служить графики прямых пропорциональных зависимостей, а также прямолинейных зависимостей, рассмотренные в параграфах 1 и 2.

Вопрос. Как выглядит график функции $y = 0 \cdot x + 2$, если областью значений переменной x является промежуток $[-1; 3]$?

4.5.* Функция $y = |x|$. Рассмотрим функцию, которая на всей числовой прямой задаётся формулой $y = |x|$.

Мы знаем, что если $x \geq 0$, то $|x| = x$, а если $x < 0$, то $|x| = -x$. Следовательно, для изображения графика функции $y = |x|$ можно рассмотреть два случая.

Пусть $x \geq 0$. Тогда $y = |x| = x$. Изобразим на рис. 1 график линейной функции $y = x$ и выделим часть точек этого графика, абсциссы которых неотрицательны. Полученный на рис. 1 луч OA является частью графика функции $y = |x|$ для $x \geq 0$.

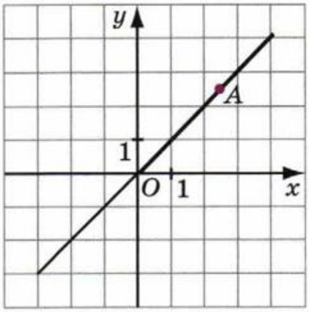


Рис. 1

Пусть $x < 0$. Тогда $y = |x| = -x$. Изобразим на рис. 2 график линейной функции $y = -x$ и выделим часть точек этого графика, абсциссы которых отрицательны. Полученный на рис. 2 луч OB без точки O является частью графика функции $y = |x|$ для $x < 0$.

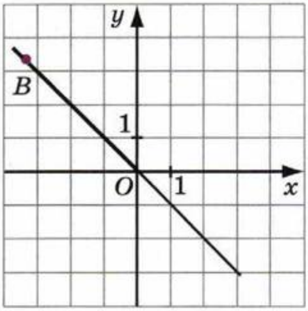


Рис. 2

Объединим на рис. 3 лучи OA и OB и получим график функции $y = |x|$.

Вопрос. Как построить график функции $y = |x - 1|$?

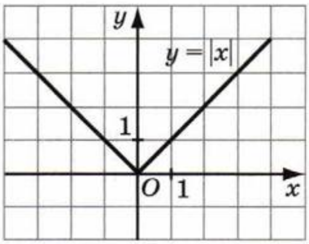


Рис. 3

4.6. Функция «целая часть x».** Определим целую часть произвольного числа x по следующему правилу.

Целой частью числа x называется наибольшее целое число n, которое меньше либо равно x.

Целая часть числа x равна n, если число x содержится в промежутке $[n;\ n + 1)$, где n — некоторое целое число.

Целая часть числа x чаще всего обозначается как $[x]$. Используя это обозначение и определение целой части числа, можем, например, записать равенства:

$$\left[\frac{6}{5}\right] = 1; \quad [-4] = -4; \quad [\sqrt{2}] = 1;$$

$$\left[-\frac{6}{5}\right] = -2; \quad [-\pi] = -4.$$

Функцию, которая в каждой точке x принимает значение $[x]$, можно записать в виде $y = [x]$.

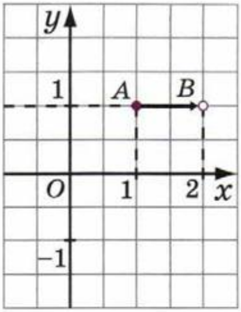


Рис. 4

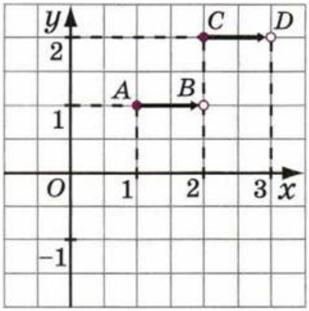


Рис. 5

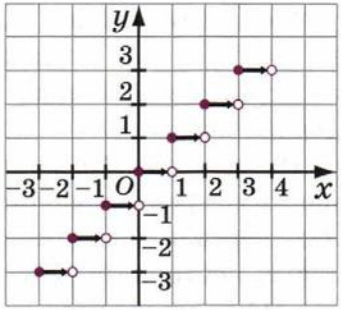


Рис. 6

Для графического представления функции $y = [x]$ рассмотрим промежутки числовой прямой вида $n \le x < n + 1$, где n — целое число.

Пусть $1 \le x < 2$. В этом случае по определению $[x] = 1$. Следовательно, для $1 \le x < 2$ можно записать $y = [x] = 1$. Изобразим на рис. 4 график функции $y = 1$ и выделим часть графика, изображённую в виде отрезка AB со стрелочкой, чтобы указать на то, что сама точка B не содержится в отмеченной части графика.

Пусть $2 \le x < 3$. Тогда $y = [x] = 2$. Изобразим на рис. 5 часть графика функции $y = 2$, выделенную в виде отрезка CD со стрелкой, чтобы указать на то, что сама точка D не содержится в отмеченной части графика.

Аналогично можно рассмотреть значения функции $y = [x]$ для $n \le x < n + 1$ при любом целом значении n.

Объединяя части графика, получим представление о графике функции $y = [x]$ (рис. 6).

Вопрос. Как выглядит график функции

$$y = \left[x + \frac{1}{2}\right]?$$

4.7. Функция «дробная часть *x*».** Определим *дробную часть* числа x как разность $x - [x]$.

Дробная часть числа x обозначается через $\{x\}$. Например, $\{1{,}2\} = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$; $\{4\} = 4 - 4 = 0$; $\{-3{,}3\} = -3{,}3 - (-4) = 0{,}7$.

Функцию, которая в каждой точке a принимает значение $\{a\}$, можно записать в виде $y = \{x\}$.

Вопрос. Как построить график функции $y = \{x\}$?

Контрольные вопросы и задания

1. Какие величины называются постоянными, а какие — переменными? Приведите примеры.

2. Что называется областью допустимых значений переменной величины? Приведите примеры.

3. Какие величины считаются зависимыми, а какие — независимыми?

4. Что такое функциональная зависимость?

5. Как кратко записать зависимость переменной y от переменной x?

6. Какая переменная называется аргументом, а какая — зависимой переменной?

7. Что называют графиком функции?

8. Как по графику найти значение функции при заданном значении аргумента?

9. Пусть задана функция $y = f(x)$.

а) Сколько значений зависимой переменной может соответствовать одному значению аргумента?

б)* Сколько значений аргумента может соответствовать одному значению функции?

10.* Какой вид имеет график функции $y = |x|$?

11.** Как определяется целая часть числа?

12.** Как определяется дробная часть числа?

Задачи и упражнения

1. Плата за квартиру состоит из a рублей оплаты коммунальных услуг и из b рублей за каждый квадратный метр жилой площади. Какой функцией определяется общая плата за квартиру жилой площадью x м^2?

2. Из прямоугольных листов картона шириной 10 см и длиной 20 см вырезают квадратики в углах со стороной x см, как указано на рис. 7, и склеивают коробку в форме прямоугольного параллелепипеда. Какой функцией определяется объём V коробки?

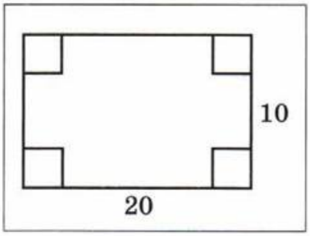


Рис. 7

3.* Равнобедренные трапеции имеют острые углы по 60° и периметр 30 см. Обозначим длину их большего основания через x см. Какой функцией определяется площадь S таких трапеций в зависимости от x?

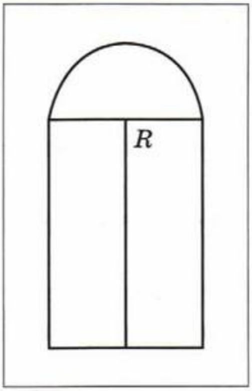


Рис. 8

4.** Оконный проём имеет форму прямоугольника с надстроенным над ним полукругом, как изображено на рис. 8. Пусть прямоугольник имеет заданный периметр P, а радиус R полукруга изменяется. Какой функцией от R определяется площадь S оконного проёма?

5. На изготовление одной детали робот затрачивает 3 с. Какой функцией определяется время T, необходимое на изготовление n деталей?

6.* Какой функцией определяется сумма n начальных членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = \frac{1}{3}$ в зависимости от аргумента n?

7.* Начертите график функции:

а) $y = |x + 1|$; б) $y = |2x - 1|$; в) $y = |x| - 1$;

г) $y = |2x + 2|$; д) $y = |x| + 2$; е) $y = |x + 1| - 2$.

8.** Решите уравнения:

а) $|2x - 4| = 3x - 1$; б) $|2x + 1| = 3x + 5$;

в) $|3x + 4| = 5$; г) $|8x + 3| = 1$.

9. Найдите на числовой оси точки, находящиеся на расстоянии 2 от точки 5.

10. Найдите на числовой оси точки, находящиеся на расстоянии 4 от точки 1.

11.** Изобразите на координатной плоскости график уравнения:

а) $|x| = |y|$; б) $|x| + |y| = 1$.

12.** Начертите график функции:

а) $y = [x + 1]$; б) $y = [x] + 1$;

в) $y = x + [x]$; г) $y = x + \{x\}$.

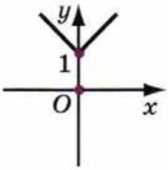
13.** Начертите график функции $y = [2x] - 2[x]$.

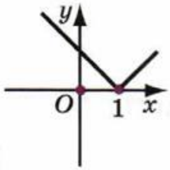
14.** Начертите график функции $y = \left\{x + \frac{1}{2}\right\}$.

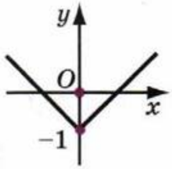
Тесты

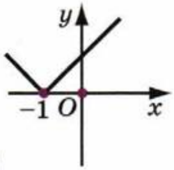
Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.** Какой график соответствует функции $y = |x + 1|$?

1) 

2) 

3) 

4) 

1.2.** Чему равна целая часть от числа $-\frac{5}{3}$?

1) -2; 2) -1; 3) $\frac{5}{3}$; 4) -5.

1.3.** Чему равна дробная часть от числа $-\frac{5}{3}$?

1) $-\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$.

1.4. Чему равна сумма первых 50 нечётных чисел?

1) 2700; 2) 2500; 3) 2300; 4) 2338.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие значения связаны зависимостью $y = 2(x - 1)$?

1) $y = 1$, $x = \frac{3}{2}$; 2) $y = \frac{3}{2}$, $x = 1$;

3) $y = -1$, $x = -\frac{3}{2}$; 4) $y = -6{,}018$, $x = -2{,}009$.

2.2.** Какие значения связаны функциональной зависимостью $x = 2(y - 1)$?

1) $y = \frac{9}{4}$, $x = \frac{5}{2}$; 2) $y = \frac{5}{4}$, $x = \frac{1}{2}$;

3) $y = -4{,}2$, $x = -1{,}1$; 4) $y = 0{,}9$, $x = -2{,}1$.

2.3. Какие из приведённых зависимостей не являются линейными?

1) $V = l^2$; 2) $S = 60t$;

3) $U = \frac{100}{t}$; 4) $S_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2}d$.

2.4. Какие из приведённых зависимостей являются линейными?

1) $y = 2(x + 3)$; 2) $y = 2x + 3$; 3) $y = 2x^2 + 3$; 4) $y = 2x(x + 3)$.

Глава 11

СВОЙСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ

В этой главе вы вспомните про касательные к окружности, узнаете важное свойство отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, научитесь строить общую касательную к двум окружностям.

§ 1. ОТРЕЗКИ КАСАТЕЛЬНЫХ

1.1. Основное свойство касательной. В 6 классе была определена касательная к окружности как прямая, которая имеет с окружностью единственную общую точку.

Было доказано, что касательные существуют. А именно: прямая, проходящая через конец радиуса окружности перпендикулярно радиусу, является касательной (рис. 1). В 6 классе было также установлено следующее основное свойство касательной.

Теорема. **Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.**

Вопрос. Как доказать, что через любую точку окружности можно провести единственную касательную к этой окружности?

1.2. Построение окружности, касающейся прямой. Разберём, как построить окружность заданного радиуса R, которая касается данной прямой l в данной точке K. Для этого через K проведём перпендикуляр s к прямой l и с центром в точке K проведём окружность радиусом R. Точки пересечения окружности с перпендикуляром s обозначим O_1 и O_2 (рис. 2). Окружности радиуса R с центром в точках O_1 и O_2 будут искомыми, так как прямая l перпендикулярна радиусам O_1K и O_2K (рис. 3).

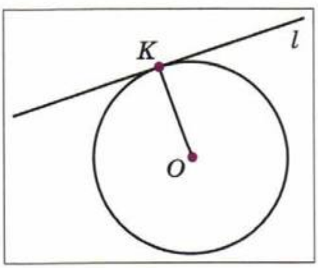


Рис. 1

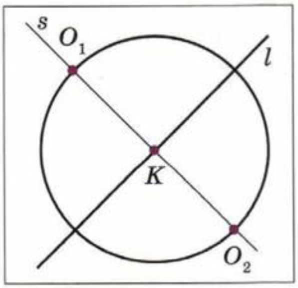


Рис. 2

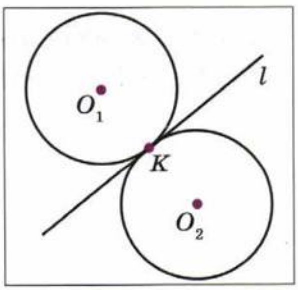


Рис. 3

Других окружностей, удовлетворяющих условиям задачи, нет. Действительно, центр любой окружности, касающейся прямой l в точке K, обязан лежать на перпендикуляре s, проведённом к прямой l через точку K. Точка K служит началом двух лучей на прямой s, и на каждом из этих лучей можно отложить только по одному отрезку длины R.

Вопрос. На каком расстоянии от прямой находится центр каждой из построенных окружностей?

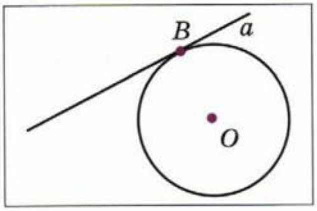


Рис. 4

1.3. Свойство отрезков касательных. На рис. 4 изображена окружность с центром O и прямая a, касающаяся окружности в точке B.

Выберем на прямой a точку A, отличную от B. Отрезок AB будем называть *отрезком касательной*, проведённой из точки A к окружности с центром O.

Теорема. **Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны.**

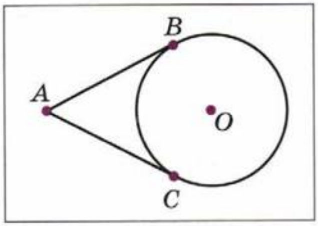


Рис. 5

Доказательство. Пусть A — точка вне окружности с центром O, AB и AC — различные отрезки касательных к одной и той же окружности (рис. 5).

Соединив отрезками центр O окружности с точками касания B и C, получим, что $OB \perp AB$, $OC \perp AC$ (рис. 6). Прямоугольные треугольники ABO и ACO имеют соответственно равные катеты BO и CO и общую гипотенузу OA. Поэтому $\Delta ABO = \Delta ACO$. Отсюда следует, что $AB = AC$ как соответственные стороны равных треугольников.

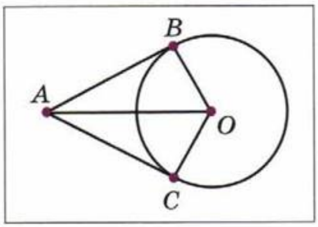


Рис. 6

Вопрос. Как показать, что отрезки касательных AB и AC на рис. 7 симметричны относительно прямой, проходящей через центр O и точку A?

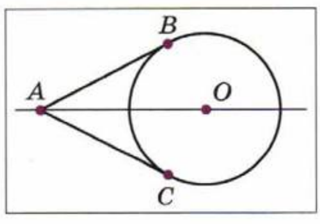


Рис. 7

1.4. Длина отрезков касательных для окружности, вписанной в треугольник. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $AB = 15$ см, $BC = 13$ см, $AC = 14$ см. Пусть вписанная в него окружность касается стороны AB в точке M, стороны BC в точке N, стороны AC в

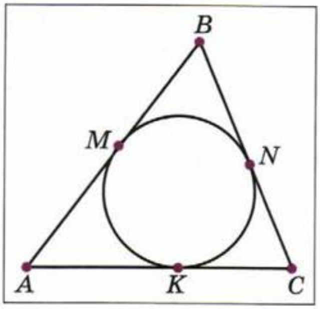


Рис. 8

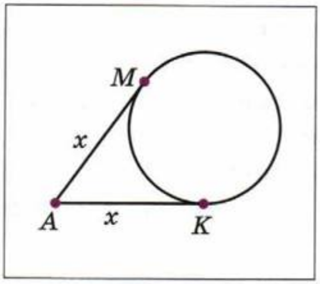


Рис. 9

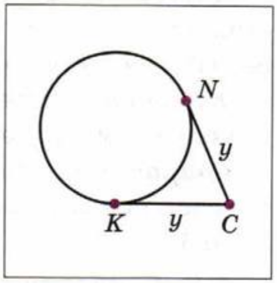


Рис. 10

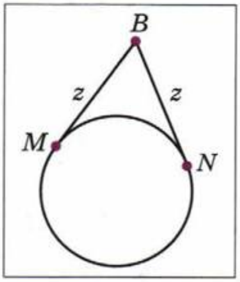


Рис. 11

точке K, как на рис. 8. Обозначим длину отрезка AK через x. Отрезок AM другой касательной, проведённой из точки A, также равен x. Длины равных отрезков касательных CK и CN обозначим через y, а длины отрезков BN и BM через z (рис. 9—11). Тогда

$$AC = x + y; \quad AB = x + z.$$

Поэтому

$$AB + AC = 2x + y + z.$$

Но $y + z = BC$. Отсюда

$$2x = AB + AC - BC.$$

Вспомним теперь, что $AB = 15$ см, $BC = 13$ см, $AC = 14$ см. В результате получим

$$x = \frac{15 + 14 - 13}{2} = 8 \text{ (см)}.$$

Вопрос. Чему в рассмотренном примере равна длина отрезка BN?

1.5. Общий случай. Рассуждения из предыдущего пункта позволяют получить правило вычисления длины отрезка AK касательной, если известны длины сторон треугольника: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (рис. 12):

$$AK = AM = \frac{AB + AC - BC}{2}$$

или

$$AK = \frac{c + b - a}{2}.$$

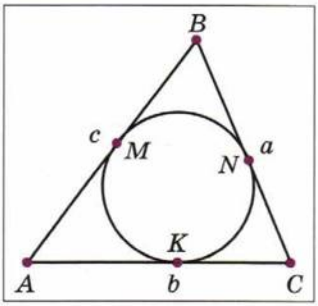


Рис. 12

Вопрос. Чему равна длина отрезка CK касательной к окружности (рис. 12)?

1.6.* Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник. Найдём радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник со сторонами 3 см, 4 см, 5 см.

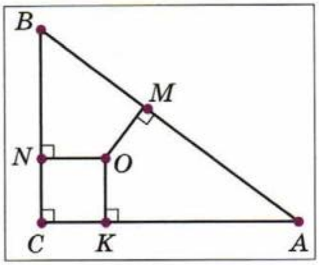


Рис. 13

Пусть A, B, C — вершины заданного треугольника, $\angle BCA = 90°$, O — центр окружности. Проведём радиусы OM, OK и ON в точки касания окружности со сторонами треугольника (рис. 13). Тогда $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Кроме того, угол BCA — прямой. Следовательно, $CNOK$ — прямоугольник. Соседние стороны OK и ON прямоугольника равны как радиусы в одной и той же окружности, поэтому $CNOK$ — квадрат.

В этом случае найти радиус — это найти отрезок стороны AC от вершины C до точки касания. Воспользуемся общей формулой из предыдущего пункта и получим

$$r = CK = \frac{CA + CB - AB}{2} = \frac{4 + 3 - 5}{2} = 1 \text{ (см)}.$$

Вопрос. Чему равно отношение длин отрезков $\dfrac{BM}{AM}$?

1.7.* Свойство четырёхугольника, описанного около окружности. Рассмотрим описанный около окружности четырёхугольник $ABCD$ и отметим точки касания K, L, M, N (рис. 14). Из теоремы об отрезках касательных получим равенства $AM = AL$, $BM = BN$, $CN = CK$, $DK = DL$.

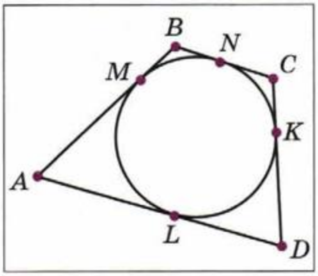


Рис. 14

Обозначим длину отрезков AM, BN, CK и DL соответственно буквами x, y, z и t (рис. 15). Тогда

$$AB + CD = x + y + z + t,$$
$$BC + AD = y + z + x + t.$$

Поэтому

$$AB + CD = BC + AD.$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. **Суммы длин противоположных сторон описанного около окружности четырёхугольника равны между собой.**

Вопрос. В какой прямоугольник можно вписать окружность?

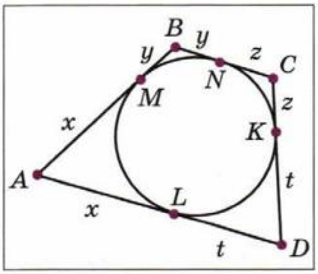


Рис. 15

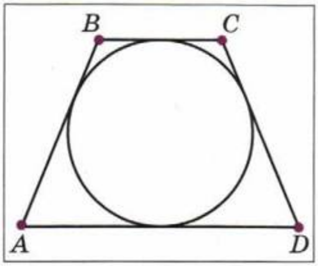


Рис. 16

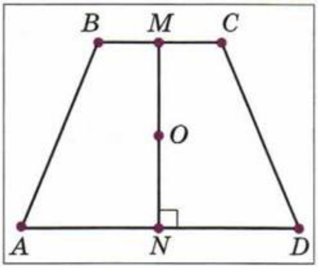


Рис. 17

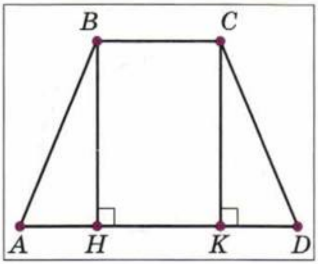


Рис. 18

1.8.* Равнобедренная трапеция, описанная около окружности. Возьмём равнобедренную трапецию с периметром 20 см, описанную около окружности радиуса 2 см. Найдём длины оснований трапеции.

Пусть AD, BC — основания трапеции (рис. 16). Тогда по условию $AB = CD$. По свойству описанного четырёхугольника получим

$$AB + CD = AD + BC,$$

и поэтому периметр будет равен

$$AB + CD + AD + BC =$$

$$= 2(AB + CD) = 4AB = 20 \text{ (см)}.$$

Отсюда $AB = 5$ (см).

Окружность касается оснований трапеции, поэтому высота равна диаметру окружности, то есть равна 4 см (рис. 17).

Проведём высоты BH и CK (рис. 18). Тогда $BCKH$ — прямоугольник, прямоугольные треугольники ABH и DCK равны по гипотенузе и катету. Отсюда $AH = KD$.

По теореме Пифагора

$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

или

$$25 = 16 + AH^2,$$

$$AH^2 = 9,\ AH = 3 \text{ см},\ KD = 3 \text{ (см)}.$$

Из условия $AD + BC = 10$ получим

$$AH + HK + KD + BC = 10 \text{ см}.$$

Но $BCKH$ — прямоугольник, поэтому $HK = BC$, $2 \cdot 3 + 2BC = 10$. Следовательно,

$$BC = 2 \text{ (см) и } AD = 8 \text{ (см)}.$$

Вопрос. Чему равны расстояния от центра O окружности до вершин трапеции $ABCD$?

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое касательная к окружности?

2. Какие свойства касательной к окружности вы знаете?

3. Что можно сказать об отрезках касательных, проведённых из одной точки к одной и той же окружности?

4. Укажите несколько осей симметрии окружности.

5.* Укажите ось симметрии окружности и двух касательных, проведённых к окружности из одной точки.

6.* Каким свойством обладают суммы длин противоположных сторон описанного четырёхугольника?

7.* В каком случае в четырёхугольник нельзя вписать окружность?

Задачи и упражнения

1. Проведите касательную, проходящую через данную точку окружности.

2. Проведите касательную к данной окружности параллельно данной прямой.

3. Проведите касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне окружности.

4. Проведите к данной окружности касательную под данным углом к данной прямой. Сколько может быть решений?

5. Из точки A проведены две касательные к окружности. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, перпендикулярна прямой, соединяющей точку A и центр окружности.

6. Постройте окружность заданного радиуса, которая касается данной прямой в данной точке.

7. Касательные, проведённые из точки A к окружности радиуса r, перпендикулярны. Выполните задания.

а) найдите отрезки касательных;

б) найдите расстояние от точки A до центра окружности;

в)** найдите кратчайшее из расстояний от точки A до точек окружности.

8. Касательные, проведённые из точки A к окружности радиуса R, образуют угол в $60°$. Выполните задания:

а) найдите отрезки касательных;

б)** найдите кратчайшее из расстояний от точки A до точек окружности.

9.* Постройте треугольник по двум углам и радиусу вписанной окружности.

10. Приведите пример трапеции, в которую нельзя вписать окружность.

11. Что можно сказать о параллелограмме, описанном вокруг окружности?

12. Постройте окружность, которая касается сторон данного угла.

13.* Постройте окружность, которая касается одной стороны данного угла и другой его стороны в данной на ней точке.

14.* Постройте окружность, проходящую через заданную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых. В каком случае задача не имеет решений?

15.** Через точку M, данную вне окружности O, проведите прямую так, чтобы она пересекла окружность в двух точках A и B и отрезок AB имел заданную длину. Когда возможно такое построение?

16.* Постройте окружность заданного радиуса, касающуюся данной прямой и проходящую через данную точку.

17.** На данной прямой найдите такую точку, чтобы касательные, проведённые из неё к данной окружности, были данной длины. Сколько решений может иметь задача?

18. В треугольник со сторонами 6 см, 8 см, 10 см вписана окружность. Найдите отрезки, на которые точки касания разбивают стороны треугольника.

19.* Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 6 см, 8 см, 10 см.

20.* Стороны треугольника в некоторых единицах измерения выражаются целыми чётными числами. Докажите, что длины отрезков, на которые точки касания вписанной окружности разбивают стороны этого треугольника, выражаются целыми числами.

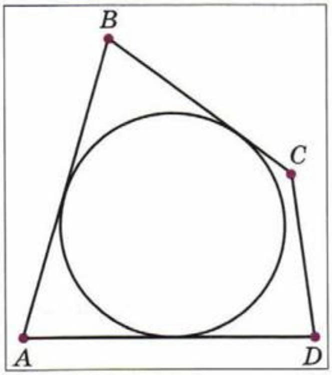


Рис. 19

21.* В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $AB = 8$ см и $CD = 3$ см можно вписать окружность. Найдите длины боковых сторон трапеции.

22.* В прямоугольную трапецию $ABCD$ с основаниями $AB = 6$ см и $CD = 3$ см можно вписать окружность. Найдите длины боковых сторон трапеции.

23.** Окружность касается трёх сторон четырёхугольника $ABCD$ и не пересекает сторону CD, как изображено на рис. 19.

Докажите, что тогда $AD + BC > AB + CD$.

24.** Окружность касается трёх сторон четырёхугольника $ABCD$ и пересекает сторону CD в двух различных точках, как изображено на рис. 20. Докажите, что тогда $AD + BC < AB + CD$.

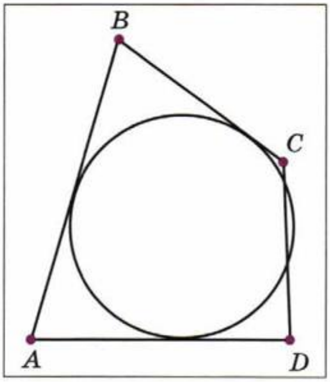


Рис. 20

25.** Докажите, что если у выпуклого четырёхугольника суммы длин противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

26.** Стороны описанного четырёхугольника $ABCD$ в вершинах соединены шарнирами. Докажите, что при любой его деформации в выпуклый четырёхугольник снова получится описанный четырёхугольник.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Прямая, содержащая отрезок AB, касается в точке A окружности с центром O и радиусом 1,5 см. Чему равна длина отрезка AB, если известно, что $OB = 2{,}5$ см?

1) 0,5 см; 2) 1 см; 3) 1,5 см; 4) 2 см.

1.2. Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C, и известно, что $\angle BOC = 120°$. Чему равна величина угла BAC?

1) 30°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 120°.

1.3. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов AC и BC в точках P и Q, и известно, что $CP = CQ = 3$ см. Чему равняется $AC + BC - AB$?

1) 1,5 см; 2) 3 см; 3) 4,5 см; 4) 6 см.

1.4. Чему равны боковые стороны равнобедренной трапеции с основаниями 7,2 см и 3,6 см, в которую можно вписать окружность?

1) 1,8 см; 2) 3,6 см; 3) 5,4 см; 4) 6,2 см.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В треугольнике ABC сторона AC равна 7 см, и на ней точка M расположена так, что $AM = 4$ см. Какими могут быть длины сторон AB и BC, если вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке M?

1) $AB = 6$ см, $BC = 7$ см; 2) $AB = 7$ см, $BC = 6$ см;
3) $AB = 9$ см, $BC = 7$ см; 4) $AB = 9$ см, $BC = 8$ см.

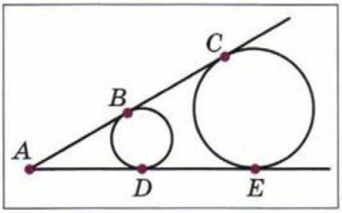


Рис. 21

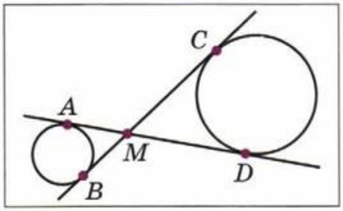


Рис. 22

2.2. В каких случаях невозможно построить описанный вокруг окружности четырёхугольник с заданными длинами сторон a, b, c, d?

1) $a = b = c = 3$ см, $d = 4$ см;
2) $a = b = 4$ см, $c = d = 5$ см;
3) $a = b = 5$ см, $c = 4$ см, $d = 6$ см;
4) $a = b = 6$ см, $c = 5$ см, $d = 4$ см.

2.3. На рис. 21 две окружности касаются сторон угла. Какие из указанных пар отрезков равны?

1) AB и AE; 2) AB и AD;
3) BC и DE; 4) BD и CE.

2.4. Две окружности разных радиусов касаются двух пересекающихся прямых, как показано на рис. 22. Какие из указанных пар отрезков равны?

1) AD и BC; 2) AB и CD;
3) AC и BD; 4) AM и DM.

§ 2. КАСАТЕЛЬНЫЕ К ОКРУЖНОСТЯМ

2.1. Общая касательная двух окружностей. Возьмём две непересекающиеся и расположенные вне друг друга окружности (рис. 1).

Рассмотрим прямую, касающуюся каждой из них. Будем называть эту прямую *общей касательной* для данных окружностей.

Окружности могут оказаться по одну сторону от этой прямой (рис. 2), и тогда общая касательная называется *внешней касательной* двух окружностей.

Окружности могут оказаться по разные стороны от общей касательной, как на рис. 3, и тогда общая касательная называется *внутренней касательной* двух окружностей.

Иногда для удобства отрезок общей касательной к двум окружностям с концами в точках касания тоже называется общей касательной.

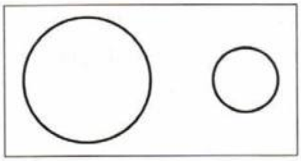


Рис. 1

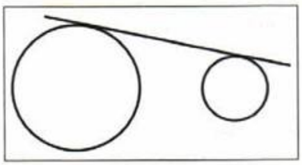


Рис. 2

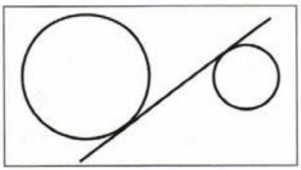


Рис. 3

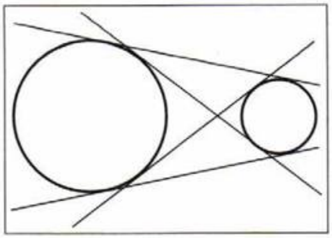


Рис. 4

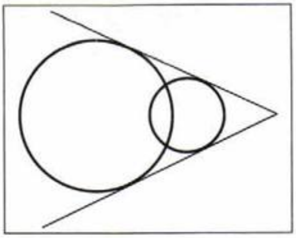


Рис. 5

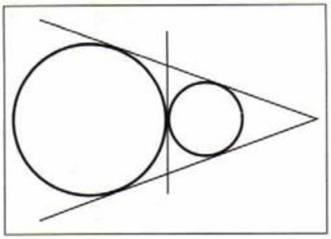


Рис. 6

Вопрос. Сколько различных общих касательных можно провести для окружностей на рис. 1?

2.2. Различные виды общих касательных. Мы рассмотрели общие касательные двух окружностей, расположенных так, как на рис. 1. Таких касательных четыре, и они изображены на рис. 4.

Разберём теперь другие возможные случаи.

Когда окружности пересекаются в двух различных точках, то их две внешние общие касательные расположены как на рис. 5, а внутренних касательных не существует.

Для двух окружностей, имеющих одну общую точку и расположенных вне друг друга, как на рис. 6, можно рассмотреть две внешних общих касательных и одну внутреннюю общую касательную.

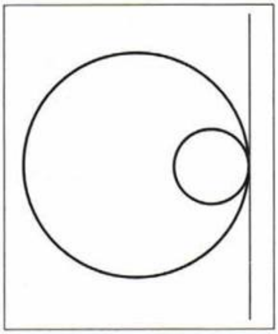


Рис. 7

Две окружности называют *касающимися внешним образом*, если они касаются некоторой прямой в одной и той же точке и расположены по разные стороны от этой прямой.

Когда одна из окружностей расположена внутри другой и имеет с ней одну общую точку (рис. 7), можно рассматривать только одну общую касательную.

Две окружности называют *касающимися внутренним образом,* если они касаются некоторой прямой в одной точке и расположены по одну сторону от этой прямой.

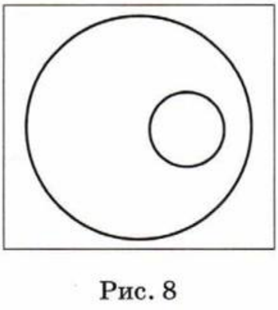


Рис. 8

Наконец, когда окружности не пересекаются и одна расположена внутри другой, как на рис. 8, никаких общих касательных не существует.

Вопрос. Как доказать, что точка касания окружностей на рис. 7 лежит на прямой, проходящей через центры окружностей?

2.3. Общая касательная к двум равным окружностям. Рассмотрим построение общей внешней касательной к двум равным окружностям.

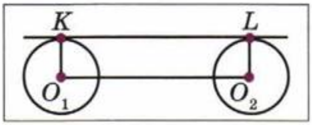


Рис. 9

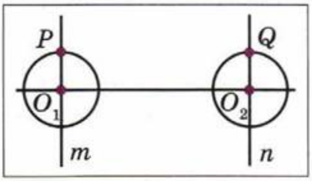


Рис. 10

Сначала предположим, что такая касательная построена. Соединим точки касания с центрами соответствующих окружностей, как на рис. 9, и рассмотрим четырёхугольник O_1KLO_2.

Стороны O_1K и O_2L равны как радиусы равных окружностей. По свойству касательной к окружности имеем $O_1K \perp KL$ и $O_2L \perp KL$, поэтому $O_1K \parallel O_2L$.

По второму признаку четырёхугольник O_1KLO_2 — параллелограмм. Так как этот параллелограмм имеет прямой угол, то он является прямоугольником.

Установленные свойства позволяют провести общую внешнюю касательную.

Построение. 1. Строим прямую m, проходящую через точку O_1 и перпендикулярную прямой O_1O_2 (рис. 10).

2. Строим прямую n, проходящую через точку O_2 и перпендикулярную прямой O_1O_2 (рис. 10).

3. В одной полуплоскости относительно прямой O_1O_2 отмечаем точки P и Q пересечения прямых m и n с окружностями (рис. 10).

Прямая PQ является общей внешней касательной данных окружностей. В самом деле, в четырёхугольнике O_1PQO_2 противоположные стороны O_1P и O_2Q равны, параллельны между собой и перпендикулярны прямой O_1O_2. Поэтому $O_1P \perp PQ$ и $O_2Q \perp PQ$. Прямая PQ перпендикулярна радиусам O_1P и O_2Q и касается обеих окружностей.

Когда точки O_1 и O_2 различны, можно провести единственные прямые m и n перпендикулярно прямой O_1O_2. Прямая m проходит через центр O_1, а поэтому пересекает первую окружность в двух точках. Аналогично прямая n пересекает вторую окружность в двух точках. Рассмотрев две полуплоскости с границей O_1O_2, получим две общих внешних касательных к данным окружностям (рис. 11).

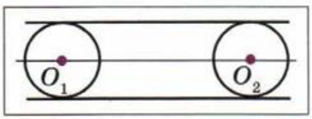


Рис. 11

Вопрос. Как доказать, что касательные на рис. 11 не пересекаются?

2.4. Общая касательная к двум окружностям с различными радиусами. Рассмотрим построение общей внешней касательной к двум непересекающимся окружностям различных радиусов R_1 и R_2. Для определённости будем считать, что $R_1 > R_2$.

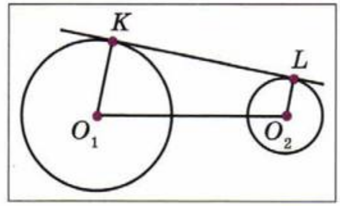


Рис. 12

Сначала предположим, что такая касательная построена. Соединим точки касания K и L с центрами соответствующих окружностей, как на рис. 12. Сделаем дополнительное построение, проведя $O_2H \perp O_1K$, как на рис. 13. Получим прямоугольник O_2HKL и прямоугольный треугольник O_1HO_2. Следовательно,

$$HK = O_2L$$

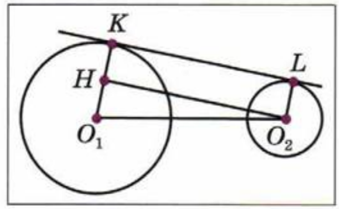


Рис. 13

и

$$O_1H = O_1K - HK = O_1K - O_2L = R_1 - R_2.$$

Найденных соотношений достаточно, чтобы провести общую внешнюю касательную.

Построение. 1. Проведём две взаимно перпендикулярные прямые m и n, как на рис. 14. Построим на прямой m отрезок EF, равный $R_1 - R_2$. С центром в точке F и радиусом O_1O_2 проведём окружность. Отметим точку G пересечения окружности с прямой n.

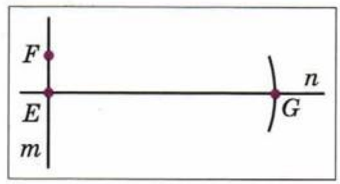


Рис. 14

2. Построим треугольник O_1HO_2, равный треугольнику EFG, у которого $O_1H = EF$ (рис. 15).

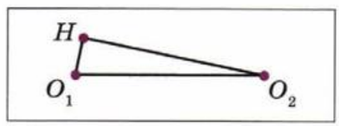


Рис. 15

3. Проведём луч O_1H и построим параллельный ему луч O_2P, как на рис. 16.

4. Отметим точки A и B пересечения лучей O_1H и O_2P с окружностями.

Прямая AB является общей внешней касательной данных окружностей.

Вопрос. Как построить общую внутреннюю касательную к двум данным окружностям?

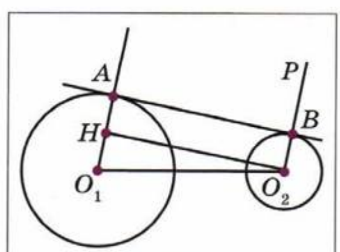


Рис. 16

2.5. Обоснование построения общей касательной к двум окружностям.** Докажем правильность построения общей внешней касательной, которое приведено в предыдущем пункте, и проведём исследование.

На рис. 15 катет O_1H имеет длину $R_1 - R_2$. Поэтому на рис. 16 у четырёхугольника $HABO_2$ стороны HA и O_2B равны R_2 и по построению параллельны. Следовательно, четырёхугольник $HABO_2$ является параллелограммом, у которого угол AHO_2 равен 90°. Поэтому $HABO_2$ — прямоугольник. Отсюда получаем, что прямая AB перпендикулярна радиусу O_1A первой окружности и радиусу O_2B второй окружности, то есть касается этих окружностей.

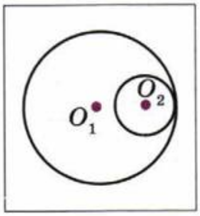


Рис. 17

Анализ построения опирался на предположение, что $R_1 > R_2$. Если окажется, что $R_1 < R_2$, то можно считать окружность с радиусом R_2 первой, окружность с радиусом R_1 — второй и провести аналогичное построение.

Мы знаем, что в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы. Поэтому треугольник EFG на рис. 14 можно построить только тогда, когда катет EF меньше гипотенузы FG, то есть когда $R_1 - R_2 < O_1O_2$.

Рис. 18

Такое неравенство не выполняется, если

$$O_1O_2 + R_1 \le R_2.$$

Случай $O_1O_2 + R_2 = R_1$ соответствует окружностям, касающимся друг друга внутренним образом, как на рис. 17.

Случай $O_1O_2 + R_2 < R_1$ соответствует окружностям, меньшая из которых лежит внутри большей окружности, как на рис. 18.

В остальных случаях треугольник EFG может быть построен. Равный ему треугольник O_1HO_2 может быть построен двумя способами: точка H лежит либо в верхней полуплоскости относительно прямой O_1O_2, либо в нижней полуплоскости. Эти случаи приводят к двум внешним касательным, изображённым на рис. 19.

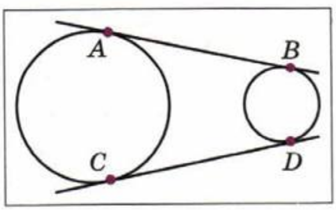


Рис. 19

Вопрос. В каких случаях можно построить общие внутренние касательные к двум данным окружностям?

2.6. Отрезки общих внешних касательных. Рассмотрим две внешние касательные AB и CD к двум неравным окружностям (рис. 19). Продолжим касательные до пересечения в точке K (рис. 20). Тогда из точки K к

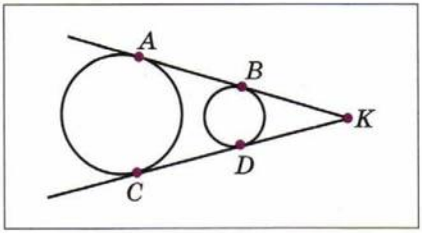


Рис. 20

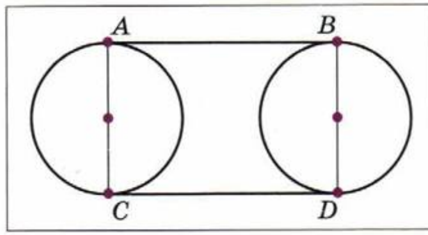


Рис. 21

большей окружности проведены отрезки касательных KA и KC, а поэтому $KA = KC$. Но из точки K к меньшей окружности тоже проведены отрезки касательных KB и KD, а поэтому $KB = KD$.

Следовательно,

$$AB = AK - BK = CK - DK = CD.$$

Если окружности равны и касательные параллельны (рис. 21), то равенство $AB = CD$ доказывается проще.

Получено свойство, которое формулируется следующим образом.

Отрезки внешних общих касательных, проведённых к двум окружностям, равны.

Вопрос. Как доказать равенство отрезков внешних касательных к двум равным окружностям?

2.7. Отрезки общих внутренних касательных. Рассмотрим две внутренние касательные MN и KL, проведённые к двум непересекающимся окружностям (рис. 22). Выполняется свойство, аналогичное свойству из предыдущего пункта.

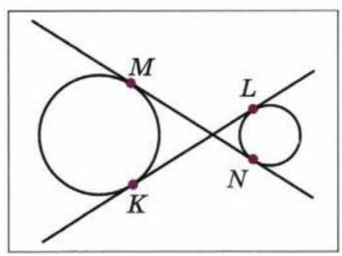


Рис. 22

Отрезки внутренних общих касательных, проведённых к двум непересекающимся окружностям, равны.

Вопрос. Как доказать сформулированное утверждение?

2.8.* Внешняя и внутренняя касательные к касающимся окружностям. Проведём к двум касающимся окружностям внешнюю и внутреннюю касательные (рис. 23). Покажем, что внутренняя касательная делит пополам от-

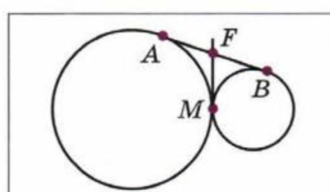


Рис. 23

резок внешней касательной в точке их пересечения, то есть $AF = FB$.

Действительно, отрезки FA и FM являются касательными к левой окружности, проведёнными из точки F, а поэтому

$$FA = FM.$$

Отрезки FB и FM являются касательными к правой окружности, проведёнными из точки F, а поэтому $FB = FM$.

Следовательно, $FA = FB$, что и требовалось доказать.

Вопрос. Как доказать, что отрезки FM и GM (рис. 24) равны?

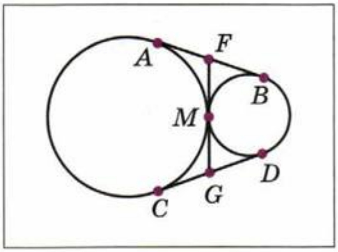


Рис. 24

2.9. Пример задачи с касательными.** Проведём к двум непересекающимся окружностям две внешние и одну внутреннюю касательные (рис. 25). Покажем, что $MN = KL$.

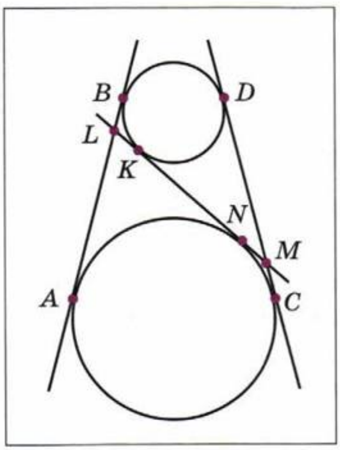


Рис. 25

Обозначим $MN = x$, $NK = a$, $KL = y$, как это сделано на рис. 26. Через величины x, a, y можно выразить длины следующих отрезков, имеющихся на чертеже:

$$BL = KL = y,\ AL = LN = a + y;$$

$$CM = MN = x,\ DM = MK = a + x.$$

Тогда $AB = AL + LB = (a + y) + y = a + 2y$,

$$CD = CM + MD = (a + x) + x = a + 2x.$$

Остаётся вспомнить, что $AB = CD$, откуда $a + 2y = a + 2x$, $x = y$.

Таким образом, получаем равенство $MN = KL$.

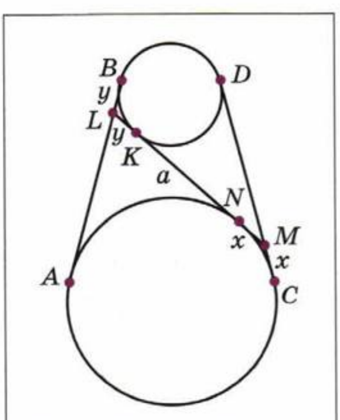


Рис. 26

Вопрос. Сколько на рис. 25 можно указать отрезков, равных отрезку AL?

2.10. Вневписанная окружность.** Посмотрим на рис. 25 из предыдущего пункта и воспроизведём его с некоторыми изменениями, продолжив внешние касательные до пересечения (рис. 27). Точки A, B и C пересечения касательных определяют треугольник ABC.

Меньшая окружность является вписанной в треугольник ABC. Большая окружность касается одной стороны и продолжений двух других сторон треугольника ABC. Такую окружность называют *вневписанной* для треугольника.

Всякая вневписанная окружность является вписанной в два внешних угла и в один внутренний угол треугольника ABC.

Вопрос. Как построить центр вневписанной окружности?

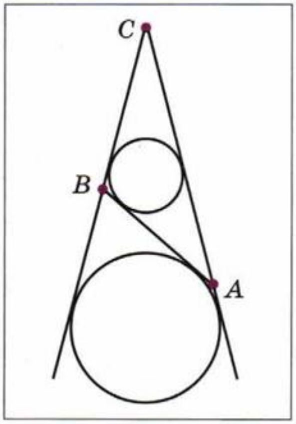


Рис. 27

2.11. Свойство вневписанной окружности.** Выделим одно из полезных свойств вневписанной окружности, пользуясь обозначениями рис. 28.

Рассмотрим отрезки BK и BL. Они равны по длине половине периметра треугольника ABC.

Действительно, $AK = AM$, $CM = CL$ по свойству отрезков касательных, поэтому

$$BK + BL = KA + AB + BC + CL =$$
$$= AB + BC + AM + MC = AB + BC + AC.$$

Таким образом,

$$BK + BL = AB + BC + AC.$$

В свою очередь отрезки BK и BL тоже равны по свойству отрезков касательных, проведённых из точки B.

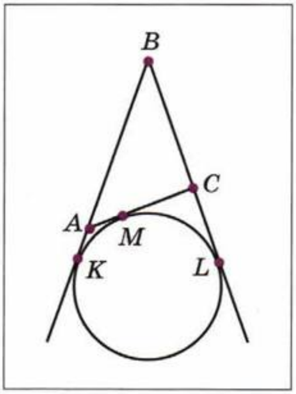


Рис. 28

Периметр треугольника равен удвоенной длине отрезка касательной, проведённой из вершины угла треугольника к вневписанной окружности, касающейся сторон этого угла.

Вопрос. Как через заданную точку провести прямую, отсекающую от заданного угла треугольник заданного периметра?

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое общая внешняя касательная к двум окружностям?

2. Что такое общая внутренняя касательная к двум окружностям?

3. Сколько различных общих внешних касательных можно провести к двум окружностям?

4. Сколько различных общих внутренних касательных можно провести к двум окружностям?

5. Докажите, что отрезки общих внешних касательных, проведённых к двум окружностям, равны.

6. Каким свойством обладают отрезки общих внутренних касательных, проведённых к двум окружностям?

7. Как построить общую внешнюю касательную к двум окружностям?

8.** Как построить общую внутреннюю касательную к двум непересекающимся окружностям?

9.** Что такое вневписанная окружность?

10.** Где расположен центр вневписанной окружности?

11.** Сколько существует вневписанных окружностей для заданного треугольника?

12.** Как связан полупериметр p треугольника с вневписанной окружностью?

Задачи и упражнения

1. Точка A находится на расстоянии 10 см от центра окружности радиуса 1 см. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки A к этой окружности.

2. Окружность радиуса 3 см касается сторон угла. Найдите расстояние от вершины угла до центра окружности, если расстояние от вершины угла до точки касания равно 2 см.

3. Две окружности с радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 1$ см касаются прямой a в точках A и B и расположены в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AB = 8$ см.

4. Две окружности с радиусами $R_1 = 2$ см и $R_2 = 4$ см касаются прямой a в точках A и B и расположены в различных полуплоскостях относительно прямой a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AB = 12$ см.

5. К окружностям с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 проводится общая внешняя касательная. Найдите длину этой касательной, если:

а) $O_1O_2 = 13$ см, $R_1 = 2$ см, $R_2 = 7$ см;

б) $O_1O_2 = 5$ см, $R_1 = 4$ см, $R_2 = 3$ см;

в) $O_1O_2 = 21$ см, $R_1 = 20$ см, $R_2 = 19$ см.

6.* К окружностям с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 проводится общая внутренняя касательная. Найдите длину этой касательной, если:

а) $O_1O_2 = 25$ см, $R_1 = 8$ см, $R_2 = 7$ см;

б) $O_1O_2 = 11$ см, $R_1 = R_2 = 3$ см.

7. Две окружности с радиусами R_1 и R_2 касаются друг друга внешним образом. Найдите длину отрезка общей внешней касательной, если:

а) $R_1 = 28$ см, $R_2 = 63$ см; б)* $R_1 = a$, $R_2 = b$.

8.** Окружности O_1 и O_2 касаются прямой l_1 внешним образом, расстояние между точками касания равно 12 см. Прямая l_2 является внутренней общей касательной к окружностям O_1 и O_2, расстояние между точками касания равно 8 см. Найдите радиусы окружностей O_1 и O_2, если известно, что радиус одной из них в 5 раз больше радиуса другой.

9.** Окружности O_1 и O_2 касаются друг друга в точке A. К окружностям проведена общая касательная l, отрезок которой между точками касания имеет длину 5 см. Найдите радиусы окружностей, если известно, что расстояние от точки A до прямой l равно 2 см.

10.* Даны два неравных непересекающихся круга. Докажите, что точка пересечения внешних касательных, точка пересечения внутренних касательных и центры кругов лежат на одной прямой.

11. Через точку касания двух окружностей проводится произвольная прямая, как на рис. 29. Докажите, что $O_1M \parallel O_2N$.

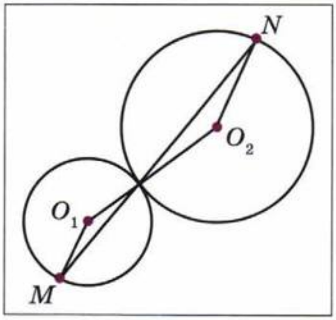


Рис. 29

12.* Две окружности касаются друг друга и касаются двух параллельных прямых так, как указано на рис. 30. Докажите, что точки A, B, C расположены на одной прямой.

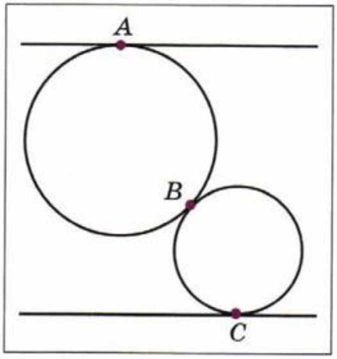


Рис. 30

13.* Две окружности касаются внешним образом друг друга в точке A и касаются некоторой прямой в точках B и C. Докажите, что угол BAC равен $90°$.

14.** Вписанная окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M, вневписанная окружность касается этой же стороны в точке K. Докажите, что $AM = BK$ и $AK = BM$.

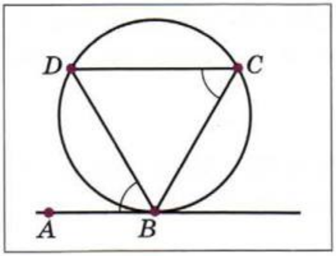


Рис. 31

15.* Постройте касательную к заданной окружности, проходящую через заданную точку.

16.* К двум окружностям различного радиуса проведены две общие внешние касательные. Докажите, что точки касания являются вершинами равнобедренной трапеции.

17.* Постройте две общие внутренние касательные к двум заданным окружностям.

18. На рис. 31 прямая AB касается окружности и $CD \parallel AB$. Докажите, что угол между касательной AB к окружности и хордой BD равен углу BCD.

19.** Даны угол и окружность, которая касается сторон угла. Постройте окружность, касающуюся заданной окружности и сторон заданного угла.

20.** Через заданную точку внутри угла проведите прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшего возможного периметра.

21. Даны окружность S и отрезок AB. Найдите множество всех точек M плоскости таких, что проведённые из них к окружности S отрезки касательных равны AB.

22.* Даны прямая l и на ней точки A и B. Проводятся всевозможные пары окружностей, одна из которых касается прямой l в точке A, другая касается прямой l в точке B, и окружности касаются друг друга в точке M. Найдите множество всех точек M.

23.** Две окружности касаются друг друга внешним образом. Найдите множество всех точек M таких, что проведённые из них отрезки MB и MC касательных к окружностям равны между собой.

24.** В плоскости заданы две равные окружности. Найдите множество всех точек M таких, что проведённые из них отрезки MB и MC касательных к окружностям равны между собой.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Сколько общих касательных можно провести к двум окружностям с радиусами 5 см и 3 см, расстояние между центрами которых равно 8 см?

1) одну; 2) две; 3) три; 4) четыре.

1.2. На плоскости заданы окружность с центром E радиуса 6 см и окружность с центром F радиуса 8 см. Через центр E меньшей окружности проводится прямая EN, которая параллельна общей внешней касательной к окружностям (рис. 32). Чему равно расстояние от точки F до прямой EN?

1) 2 см; 2) 3 см;
3) 5 см; 4) 7 см.

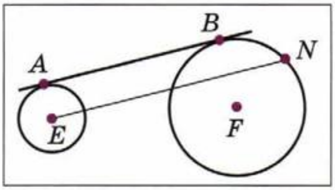


Рис. 32

1.3. Окружность с центром O и радиусом 3 см касается сторон угла с вершиной P в точках A и B. Чему равно расстояние от центра окружности до вершины угла, если $AP = 5$ см?

1) $\sqrt{14}$ см; 2) $\sqrt{22}$ см;
3) $\sqrt{28}$ см; 4) $\sqrt{34}$ см.

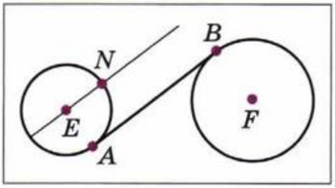


Рис. 33

1.4. На плоскости заданы окружность с центром E радиуса 2 см и окружность с центром F радиуса 6 см. Через центр E меньшей окружности проводится прямая EN, которая параллельна общей внутренней касательной к окружностям (рис. 33). Чему равно расстояние от точки F до прямой EN?

1) 4 см; 2) 6 см;
3) 8 см; 4) 10 см.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. К двум окружностям проведены две касательные так, как показано на рис. 34. Какие из указанных пар отрезков равны?

1) AF и BF; 2) AD и BF;
3) CF и DF; 4) AF и BC.

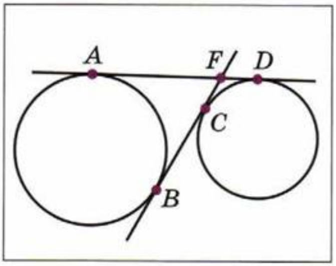


Рис. 34

2.2. При каких значениях a, b, m в равнобедренную трапецию с основаниями a, b и боковой стороной m невозможно вписать окружность?

1) $a = 1$ см, $b = 5$ см, $m = 4$ см;
2) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $m = 5$ см;
3) $a = 4$ см, $b = 10$ см, $m = 7$ см;
4) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $m = 7$ см.

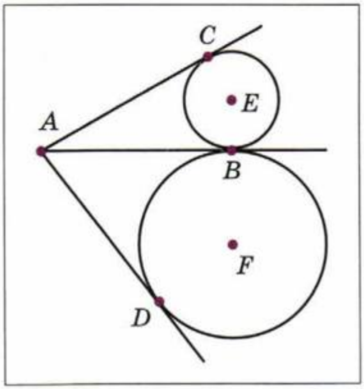


Рис. 35

2.3. Две неравные окружности с центрами E и F касаются друг друга и касаются лучей с общей вершиной A так, как показано на рис. 35. Какие из указанных треугольников являются равнобедренными?

1) треугольник ABC;
2) треугольник AEF;
3) треугольник ACD;
4) треугольник ABD.

2.4. На плоскости заданы точки A и B, расстояние между которыми равно 3 см. С центрами A и B и радиусами R и r проводятся окружности и строится отрезок CD их общей внешней касательной. При каких значениях R и r длина отрезка CD равна $\sqrt{5}$ см?

1) $R = 8$ см, $r = 6$ см; 2) $R = 6$ см, $r = 5$ см;
3) $R = 11$ см, $r = 10$ см; 4) $R = 9$ см, $r = 7$ см.

Глава 12

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В этой главе вы узнаете приёмы решения систем уравнений, вспомните о применении графиков в решении задач, найдёте примеры уравнений и систем, в которых требуется получить целочисленные решения.

§ 1. СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1.1. Составление двух уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим следующую задачу. Члены общества садоводов собираются поделить отведённую им землю на участки равной площади. Если каждому отводить участок по 12,5 сотки, то при этом останется 100 соток свободной земли. Если же каждому отводить участок по 16 соток, то не хватит 12 соток. Сколько человек в обществе садоводов?

Обозначим через x общую площадь в сотках, а через y — количество человек в обществе.

При выделении каждому члену общества по 12,5 сотки в сумме получится $12{,}5y$ соток. И эта площадь меньше x на 100 соток. Следовательно,

$$x = 12{,}5y + 100. \tag{1}$$

При выделении каждому члену общества по 16 соток в сумме получится $16y$ соток, что больше x на 12 соток. Следовательно,

$$x = 16y - 12. \tag{2}$$

Таким образом, для решения данной задачи достаточно найти положительное значение неизвестного x и целое положительное значение неизвестного y, удовлетворяющих одновременно уравнениям (1) и (2).

Получившиеся уравнения образуют *систему двух уравнений с двумя неизвестными*.

В левых частях равенств (1) и (2) стоит одно и то выражение x. Поэтому правые части этих равенств равны:

$$12{,}5y + 100 = 16y - 12.$$

Приходим к линейному уравнению с одним неизвестным y. Краткая запись решения этого уравнения имеет вид:

$$100 + 12 = 16y - 12{,}5y,$$

$$(16 - 12{,}5)y = 100 + 12,$$

$$3{,}5y = 112,$$
$$y = 112 : 3{,}5 = 32.$$

Тем самым в обществе садоводов состоят 32 человека.

Заметим, что общая площадь x отведённой земли равна $x = 16 \cdot 32 - 12 = 500$ (соток).

Вопрос. Сколько земли достанется каждому члену общества, если всю отведённую землю поделить поровну?

1.2. Решение систем уравнений. Рассмотрим следующую задачу.

Из двух городов, расстояние между которыми 360 км, одновременно навстречу друг другу выехали два поезда. Двигаясь с постоянными скоростями, поезда встретились через 4 ч. Если бы второй поезд выехал на 54 мин раньше первого, то встреча произошла бы через 3,5 ч после выхода первого поезда. Найти скорости этих поездов.

Пусть x км/ч — скорость первого поезда, а y км/ч — скорость второго поезда. Выехав одновременно, поезда встретились через 4 ч. За это время в сумме они проехали $(4x + 4y)$ км, что по условию задачи составляет 360 км. Поэтому

$$4x + 4y = 360. \qquad (3)$$

Если бы второй поезд выехал на 54 мин, то есть на 0,9 ч, раньше первого, то время движения второго поезда до встречи составляло бы 4,4 ч и за это время второй поезд проехал бы $4{,}4y$ км.

Первый поезд за 3,5 ч до встречи поездов проехал бы $3{,}5x$ км.

Из того, что в сумме оба поезда проехали бы 360 км, получаем:

$$3{,}5x + 4{,}4y = 360. \qquad (4)$$

Таким образом, для решения данной задачи достаточно найти положительные значения неизвестных x и y, удовлетворяющих одновременно уравнениям (3) и (4).

Получившиеся уравнения образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными. Эту систему можно записать в виде

$$\begin{cases} 4x + 4y = 360, \\ 3{,}5x + 4{,}4y = 360. \end{cases}$$

Заметим, что из первого уравнения системы следует, что $x + y = 90$. Поэтому $x = 90 - y$.

Подставив в левую часть второго уравнения вместо неизвестного x равное ему выражение $90 - y$, получим уравнение с одним неизвестным:

$$3{,}5 \cdot (90 - y) + 4{,}4y = 360.$$

Отсюда $0{,}9y = 360 - 3{,}5 \cdot 90 = 360 - 315 = 45$.

Следовательно, $y = 45 : 0{,}9 = 50$.

Получив значение $y = 50$, из соотношения $x + y = 90$ находим

$$x = 90 - y = 90 - 50 = 40.$$

Найденные значения для x и y можно записать в виде пары чисел (40; 50), которая является решением системы

$$\begin{cases} 4x + 4y = 360, \\ 3{,}5x + 4{,}4y = 360. \end{cases}$$

Ответ: скорость первого поезда — 40 км/ч, скорость второго поезда — 50 км/ч.

Вопрос. Какой вид будет иметь решение системы уравнений (3) и (4), если подставить во второе уравнение системы вместо неизвестного y равное ему выражение $90 - x$?

1.3. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотренные в данном параграфе задачи сводились к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

В общем случае системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называют систему вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{5}$$

В этой записи буквами a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 обозначают постоянные, которые в конкретных задачах являются числами, а буквами x и y обозначают переменные или неизвестные.

Например, в системе из пункта 1.2 имеем $a_1 = 4$, $b_1 = 4$, $c_1 = 360$, $a_2 = 3{,}5$, $b_2 = 4{,}4$, $c_2 = 360$.

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется такая пара чисел (x_0; y_0), при подстановке которых в уравнения вместо соответствующих неизвестных x и y получаются числовые равенства.

Решить систему — значит либо найти все её решения, либо показать, что решений нет.

В случае системы линейных уравнений (5) пара чисел (x_0; y_0) является решением, если одновременно выполняются равенства

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2. \end{cases}$$

Вопрос. Как решить систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2? \end{cases}$

1.4. Пример системы, не имеющей решений. Покажем, что иногда система двух линейных уравнений может не иметь решений.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 2. Получим уравнение $2x + 2y = 4$. Но из второго уравнения $2x + 2y$ равно 3. Такого не может быть, поскольку 3 не равно 4. Поэтому значений x и y, которые удовлетворяли бы уравнениям этой системы, нет.

Иногда в этом случае говорят, что система уравнений *несовместна*.

Вопрос. Какое уравнение с двумя неизвестными, не имеющее решений, вы можете предложить?

1.5. Пример системы с бесконечным множеством решений. Покажем, что система двух линейных уравнений иногда может иметь сколь угодно много решений.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = 4. \end{cases}$$

Выразим x через y как в первом, так и во втором уравнении:

$$\begin{cases} x = y + 2, \\ x = y + 2. \end{cases}$$

Получили два одинаковых равенства. Это значит, что можно взять любое значение для y, например $y = 2000$, и найти $x = y + 2 = 2002$. При этом пара чисел $x = 2000$, $y = 2002$ удовлетворяет как первому, так и второму уравнению начальной системы.

Аналогично для каждого числа a можно взять $y = a$, $x = a + 2$ и получить пару чисел $(a + 2; a)$, являющуюся решением начальной системы.

Вопрос. Какую систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, имеющую сколь угодно много решений, вы можете предложить?

1.6. Частичное исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.** Вернёмся к рассмотрению системы (5) из пункта 1.3:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Домножив первое уравнение на число b_2, а второе уравнение на число $(-b_1)$, получим

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2, \\ -b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2. \end{cases}$$

Складывая соответственно левые и правые части этих уравнений, получаем

$$(a_1b_2 - b_1a_2)x = c_1b_2 - b_1c_2.$$

Аналогично домножив первое уравнение начальной системы на число $(-a_2)$, а второе уравнение на число a_x, получим

$$\begin{cases} -a_1a_2x - b_1a_2y = -c_1d_2, \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2. \end{cases}$$

Складывая соответственно левые и правые части этих уравнений, получаем

$$(a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1c_2 - c_1a_2.$$

Выражение $a_1b_2 - b_1a_2$ иногда называют *определителем* системы двух линейных уравнений.

Заметим, что если определитель системы не равен нулю, то из полученных выше равенств находим единственное значение x и единственное значение y:

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

Вопрос. Как показать, что найденная пара чисел $(x;\ y)$ является решением системы (5)?

1.7. Пример системы, которая заменой неизвестных сводится к линейной.** Иногда система двух уравнений с двумя неизвестными не является линейной, однако при обозначении некоторых буквенных выражений одной буквой можно получить систему линейных уравнений.

Пример 1. Пароход за 9 ч проплыл сначала 100 км по течению реки, а затем 64 км против течения. В следующий раз пароход за 9 ч проплыл сначала 80 км против течения реки, а затем 80 км по течению. Какова скорость парохода в стоячей воде?

Пусть x км/ч — скорость парохода в стоячей воде, y км/ч — скорость течения реки и $x > y$. Тогда $(x + y)$ км/ч — скорость парохода по течению реки, $(x - y)$ км/ч — скорость парохода против течения.

Расстояние в 100 км по течению реки пароход проплывает за $\dfrac{100}{x+y}$ ч, а 64 км против течения реки — за $\dfrac{64}{x-y}$ ч. Поэтому

$$\frac{100}{x+y} + \frac{64}{x-y} = 9.$$

Аналогично из условия задачи получаем

$$\frac{80}{x+y}+\frac{80}{x-y}=9.$$

Получилась нелинейная система уравнений.

$$\begin{cases}\dfrac{100}{x+y}+\dfrac{64}{x-y}=9,\\ \dfrac{80}{x+y}+\dfrac{80}{x-y}=9.\end{cases}$$

Чтобы свести эту систему к линейной, введём новые переменные

$$a=\frac{1}{x+y},\quad b=\frac{1}{x-y}.$$

Тогда

$$\begin{cases}100a+64b=9,\\ 80a+80b=9.\end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $a=\dfrac{9-64b}{100}$.

Подставив это выражение вместо a во второе уравнение, получаем:

$$\frac{8}{10}\cdot(9-64b)+80b=9;$$

$$72-512b+800b=90;$$

$$288b=18;$$

$$b=\frac{1}{16}.$$

Тогда

$$a=\frac{19-64b}{100}=\frac{9-4}{100}=\frac{1}{20}.$$

Значит, $\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{20}$, $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{16}$, откуда $x+y=20$, $x-y=16$.

Получаем систему:

$$\begin{cases}x-y=16,\\ x+y=20.\end{cases}$$

Это система линейных уравнений. Сложив эти уравнения, получим:

$$2x=16+20=36,\ x=18,$$

$$y=20-x=20-18=2.$$

Ответ: 18 км/ч.

Вопрос. Какова в рассмотренной задаче скорость движения парохода против течения реки?

1.8.** Линейная система с параметром.

Пример 2. Пусть a — фиксированное число. Решим систему

$$\begin{cases}3x + (a+2)y = 4,\\4x + (a+3)y = 5\end{cases}$$

двух уравнений с неизвестными x и y, то есть найдём, как выразить решения x и y через значение a.

Домножим первое уравнение на 4, а второе на -3:

$$\begin{cases}4 \cdot 3x + 4 \cdot (a+2)y = 4 \cdot 4,\\-3 \cdot 4x - 3 \cdot (a+3)y = -3 \cdot 5.\end{cases}$$

Сложим правые и левые части полученных уравнений

$$12x - 12x + 4(a+2)y - 3(a+3)y = 16 - 15;$$
$$(a-1)y = 1.$$

Если $a \neq 1$, то из полученного равенства сможем найти $y = \dfrac{1}{a-1}$. Подставив это значение вместо y в первое уравнение, получим

$$3x + \frac{a+2}{a-1} = 4;\ 3x = 4 - \frac{a+2}{a-1};$$

$$3x = \frac{3a-6}{a-1};\ x = \frac{a-2}{a-1}.$$

Таким образом, при $a \neq 1$ найдена пара значений x и y, являющаяся решением начальной системы.

Если $a = 1$, то равенство $(a-1) \cdot y = 1$ принимает вид $0 \cdot y = 1$. Такому равенству не удовлетворяет ни одно значение y, и поэтому при $a = 1$ начальная система решений не имеет.

Ответ: система имеет одно решение при всех a, отличных от 1; система не имеет решений при $a = 1$.

Вопрос. Как проверить, что при $a \neq 1$ пара чисел $\left(\dfrac{a-2}{a-1}; \dfrac{1}{a-1}\right)$ является решением системы из примера 2?

Контрольные вопросы и задания

1. Как вы понимаете слова: «система двух уравнений с двумя неизвестными»?

2. Как вы понимаете слова: «система двух линейных уравнений с двумя неизвестными»?

3. Что называют решением системы двух уравнений с двумя неизвестными?

4. Что значит решить систему уравнений?

5. Приведите пример системы линейных уравнений, не имеющей ни одного решения.

6. Приведите пример системы уравнений, имеющей более одного решения.

7.** Что значит решить систему уравнений?

8.* Приведите пример системы, которая за счёт введения новых переменных сводится к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Задачи и упражнения

1. Будет ли указанная пара чисел $(x_0; y_0)$ решением системы?

а) (20; 10), $\begin{cases} x + 2y = 40, \\ x - y = 10; \end{cases}$

б) (3,1; −2,4), $\begin{cases} 6x + 4y = 9, \\ 2x - 2y = 10; \end{cases}$

в) (−0,4; 7,3), $\begin{cases} 11x + 8y = 54, \\ 6x + 2y = 5; \end{cases}$

г) $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{7}\right)$, $\begin{cases} 3x + 14y = 0, \\ 14x + 3y = 10. \end{cases}$

2. Дан набор следующих пар чисел:

а) $t = 0$; $u = 4$; б) $t = 2$; $u = 5$; в) $t = 2$; $u = 3$; г) $t = 5$; $u = 0$.

Какие из этих пар являются решениями системы $\begin{cases} t + u = 5, \\ 2t + 3u = 15? \end{cases}$

3. Решите системы:

а) $\begin{cases} x = 8y - 11, \\ x = 15y + 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 0{,}3x - 5, \\ y = 1{,}3x + 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 5x - 4, \\ x + y = 7x + 8; \end{cases}$

г)* $\begin{cases} x = 5y + 1, \\ 2x = 8y + 3; \end{cases}$ д)* $\begin{cases} 2y = x - 1, \\ 3y = 2x - 1; \end{cases}$ е)* $\begin{cases} x + y = 2005, \\ x - y = 2007. \end{cases}$

4.* Решите системы:

а) $\begin{cases} 6x + 2y = 8, \\ 4x - y = 3 \end{cases}$ (предварительно умножьте правую и левую части первого уравнения на $\frac{2}{3}$);

б) $\begin{cases} 7x - 2y = 5, \\ 14x + y = 9 \end{cases}$ (предварительно умножьте правую и левую части первого уравнения на 2);

в) $\begin{cases} 5x - 3y = 9, \\ 3x - 7y = 11 \end{cases}$ (предварительно умножьте правую и левую части первого уравнения на $\frac{3}{5}$).

5.* Для каждой из следующих систем: 1) определите, на какое число нужно умножить обе части первого уравнения в системе таким образом, чтобы коэффициент при x стал в обоих уравнениях системы одинаковым; 2) решите получившуюся систему:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 6x + 4y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y = 9, \\ 6x - y = 14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x + y = 9, \\ 5x - y = 3. \end{cases}$

6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 3x - 2y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y = 13, \\ 4x + 2y = 14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x + 3y = 11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2y = 11, \\ 5x - 3y = 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 5x + 5y = 35; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$

7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{9}{5}x - 2y = 11, \\ 12x - 25y = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 6y = 13, \\ 7x + 18y = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 0{,}2y = 1{,}1, \\ 3x - 0{,}2y = 0{,}9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7x + 12y = 20, \\ 7x - 8y = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x - 33y = 44, \\ 10x + 33y = -11; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 15x + 23y + 10 = 0, \\ 3x + 4y + 2 = 0; \end{cases}$

ё) $\begin{cases} 25x - 4y + 1 = 0, \\ 31x - 5y + 16 = 0. \end{cases}$

8.* Найдите все решения системы:

а) $\begin{cases} 3y - x = -2, \\ 2x - 6y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x - 2y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}1x + 2y = 3, \\ x + 20y = 30; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 6x = 5 + 4y. \end{cases}$

9.** При каждом значении a найдите решения системы:

а) $\begin{cases} y - ax = 0, \\ 5ax - y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x + 2ay = 1, \\ 2x + 4ay = 0{,}25; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + (a+1)y = 6, \\ 3x + (a-1)y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - ay = a + 1, \\ 5x + (a+2)y = 3 - a. \end{cases}$

10.* Как записать все пары чисел, которые являются решениями системы $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12? \end{cases}$

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какая из следующих пар значений переменных является корнем уравнения $x + 2xy - y = 7$?

1) $x = 5$, $y = 1$; 2) $x = 3$, $y = -3$; 3) $x = 1$, $y = 6$; 4) $x = 1$, $y = -6$.

1.2. Какая из систем уравнений имеет решением пару $x = 2$, $y = 3$?

1) $\begin{cases} 7x + 7y = 35, \\ 5x - y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 12x - 9y = -3, \\ 3x + 5y = 21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x + 7y = 36, \\ 5x - y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 12x - 9y = -3, \\ 3x + 5y = 22. \end{cases}$

1.3.* Какая из следующих систем имеет то же решение, что и система $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$?

1) $\begin{cases} 3x - y = 9, \\ 2x - 3y = -8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 0{,}5, \\ 2x - y = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x - y = 18, \\ 2y - 3 = x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - y = 23, \\ -x + 2y = -10. \end{cases}$

1.4. Какая из приведённых систем не имеет решений?

1) $\begin{cases} 2x + 2y = 5, \\ 3x + 3y = 7\frac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 2y = 5, \\ 3x + 2y = 7\frac{1}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 3x + 3y = 7\frac{1}{2}. \end{cases}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.* На какие числа нужно умножить соответственно уравнения $3x - 5y = 5$ и $x + 3y = 2$ так, чтобы после их сложения в получившемся уравнении отсутствовал y?

1) на 5 и на -3; 2) на 3 и на -5; 3) на 3 и на 5; 4) на 4 и на $\frac{20}{3}$.

2.2.* Какие из следующих систем имеют те же решения, что и система $\begin{cases} 8y + 2x = -20 \\ 7y - 3x = -27 \end{cases}$?

1) $\begin{cases} 3x - 5y = -22, \\ 5x + 10y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 7y = -15, \\ 15x + 2y = 24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 12y = 9, \\ 4x + 9y = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x + 14y = 8, \\ 3x + y = -5. \end{cases}$

2.3. Какие из следующих уравнений вместе с уравнением $2x - 3y = 4$ составляют систему, не имеющую решений?

1) $4x - 6y = 8$; 2) $6x - 9y = 15$;
3) $8x - 12y = 17$; 4) $x - 1{,}5y = 2$.

2.4.* При каких значениях a из указанных система уравнений $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

1) $a = -1$; 2) $a = 0$; 3) $a = 1$; 4) $a = 2$.

§ 2. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

2.1 Решение задач с помощью графиков.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу. Из Шаболовки в Останкино в 12 ч дня выбежал Хрюша со скоростью 7 км/ч. Одновременно из Останкина в Шаболовку вышел Филя со скоростью 3 км/ч. Найти, в какое время встретятся Филя и Хрюша, если путь от Шаболовки до Останкина 25 км.

Для иллюстрации графического способа решения системы уравнений с двумя неизвестными разберём такой подход. Обозначим через x время в часах, прошедшее с 12 ч до момента встречи, и через y — расстояние в километрах от Шаболовки до места встречи.

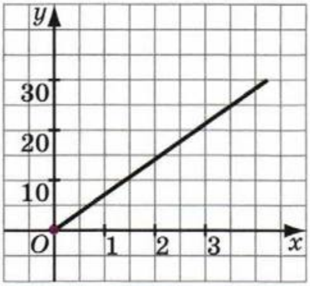


Рис. 1

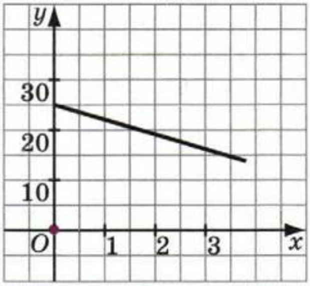


Рис. 2

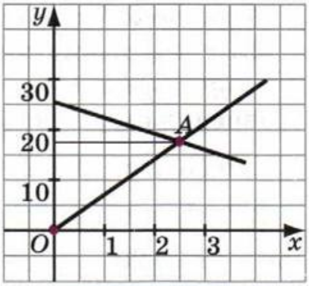


Рис. 3

Так как за x ч Хрюша пробежит $7x$ км, то он окажется в $7x$ км от Шаболовки. Следовательно, $y = 7x$.

Так как за x часов Филя пройдёт $3x$ км, то он окажется на расстоянии $3x$ км от Останкина и на расстоянии $(25 - 3x)$ км от Шаболовки. Следовательно, $y = 25 - 3x$.

Решение задачи сводится к решению системы $\begin{cases} y = 7x, \\ y = 25 - 3x. \end{cases}$

График уравнения $y = 7x$ в координатной плоскости совпадает с графиком линейной функции $y = 7x$ (рис. 1).

Аналогично график уравнения $y = 25 - 3x$ совпадает с графиком линейной функции $y = 25 - 3x$ (рис. 2).

Решением системы являются координаты общей точки A построенных графиков (рис. 3). Приближённые значения этих координат $(2{,}5;\ 17{,}5)$.

Легко проверить, что указанные значения являются точными.

Ответ: в 14 ч 30 мин.

Пример 2. Решите с помощью графиков систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases}$$

Выразим y через x как из первого, так и из второго уравнений системы

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{3} \cdot x - 1, \\ y = \dfrac{11}{2} - \dfrac{3}{2} \cdot x. \end{cases}$$

В координатной плоскости решения первого уравнения представляются точками графика функции $y = \dfrac{2}{3}x - 1$. Для построения графика

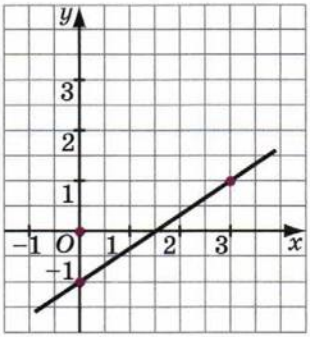


Рис. 4

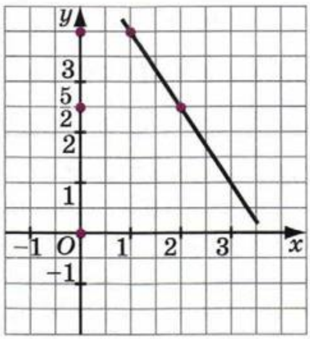


Рис. 5

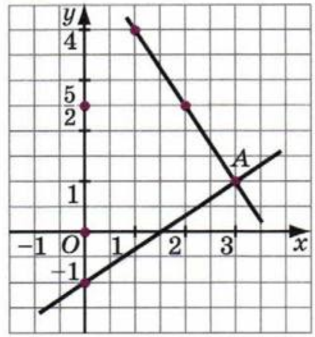


Рис. 6

найдём при $x = 0$ значение $y = -1$ и при $x = 3$ значение $y = 1$. Через точки $(0; -1)$ и $(3; 1)$ проведём прямую (рис. 4).

Решения второго уравнения представляются точками графика функции $y = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}x$. Для построения этого графика найдём при $x = 1$ значение $y = 4$ и при $x = 2$ значение $y = \frac{5}{2}$. Через точки $(1; 4)$ и $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ проведём прямую, как на рис. 5.

На рис. 6 изобразим оба графика и найдём координаты точки A их пересечения. Получим $A(3; 1)$. Так как по рисунку можно лишь приближённо указать координаты точки, то найденные значения проверим подстановкой:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 3, \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11. \end{cases}$$

В нашем случае оба равенства выполняются, а поэтому полученная графическим способом пара чисел $(3; 1)$ является точным решением начальной системы.

Вопрос. Как доказать, что рассмотренная система имеет единственное решение?

2.2. Графическое решение системы, содержащей уравнение, не зависящее от y. Разберём графическое решение системы

$$\begin{cases} 5x + 3y + 7 = 0, \\ x + 2 = 0. \end{cases}$$

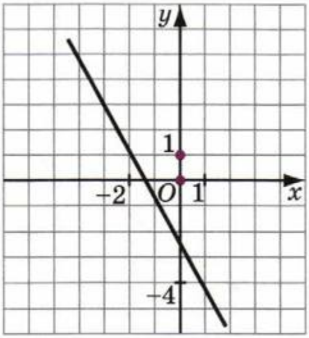


Рис. 7

Из первого уравнения системы выразим y через x и построим график функции $y = -\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$ аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте (рис. 7).

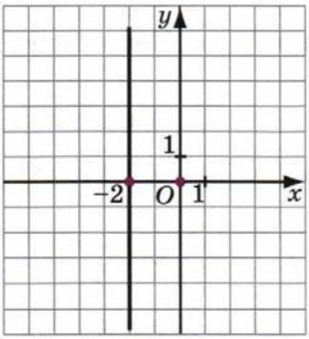


Рис. 8

Второе уравнение системы в своей записи не содержит неизвестного y. Это значит, что равенство $x + 2 = 0$ выполняется при любом значении неизвестного y, если значение x равно числу − 2. Следовательно, все пары вида $(-2; a)$, где a любое число, являются решениями второго уравнения системы. Все эти точки с координатами $(-2; a)$ составляют вертикальную прямую (рис. 8).

На рис. 9 изобразим оба графика и найдём координаты точки A их пересечения. Получим $A(-2; 1)$.

Проверкой можем убедиться, что пара чисел $x = -2$, $y = 1$ является точным решением начальной системы.

Вопрос. Как в координатной плоскости построить прямую с уравнением $15x + 15 = 0$?

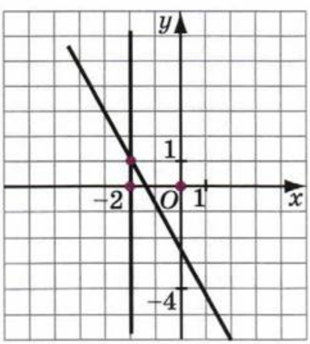


Рис. 9

2.3. Графическое представление системы, не имеющей решений.

Пример 3. Рассмотрим решение с помощью графиков системы

$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - 0{,}5x = 1. \end{cases}$$

Выразим y через x как из первого, так и из второго уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}x + 1. \end{cases}$$

Построим графики функций $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$. Эти линейные функции имеют одинаковые угловые коэффициенты, а поэтому их графики являются параллельными прямыми, как это изображено на рис. 10. Следовательно, графики не пересекаются. Это значит, что не существует пар чисел $(a; b)$, которые одновременно удовлетворяют обоим уравнениям системы, то есть наша система уравнений не имеет решений.

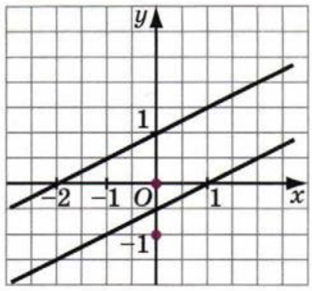


Рис. 10

Вопрос. Что такое угловой коэффициент прямой?

2.4. Графическое представление системы, имеющей бесконечное множество решений.

Пример 4. Рассмотрим решение с помощью графиков системы

$$\begin{cases} x + 2y = 0{,}5, \\ 2x + 4y = 1. \end{cases}$$

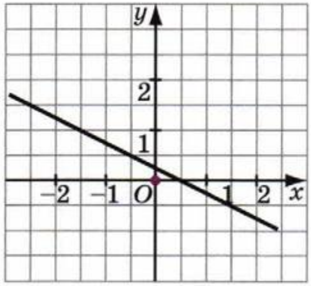


Рис. 11

Выразим y через x как из первого, так и из второго уравнений:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \cdot x + \dfrac{1}{4}, \\ y = -\dfrac{1}{2} \cdot x + \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Получаем одно и то же уравнение, записанное дважды. Это значит, что если мы построим график первого уравнения $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ системы, то график второго уравнения этой системы будет в точности таким же (рис. 11). Следовательно, общие решения уравнений нашей системы совпадают с решениями любого из уравнений, то есть решения системы получаются как пары координат точек графика функции $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Такими парами координат будут, например, $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(0;\ -\frac{1}{4}\right)$, $\left(5; -\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right)$, $\left(-7; \frac{7}{2} + \frac{1}{4}\right)$ и вообще любая пара чисел, имеющая вид $\left(a; -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\right)$, где a — произвольное число.

Вопрос. Какие из пар чисел $(-8; 6)$, $(10; 10)$, $\left(2; -\frac{3}{4}\right)$ являются решениями системы, рассмотренной в примере 4?

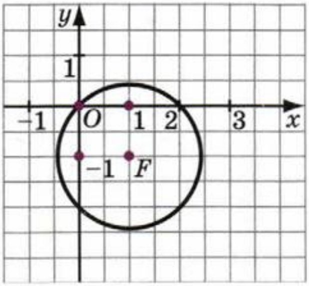


Рис. 12

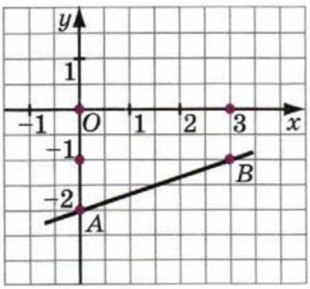


Рис. 13

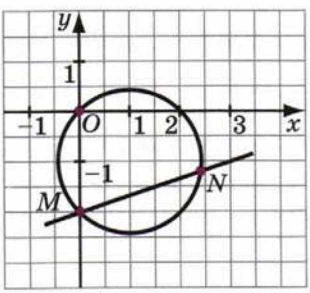


Рис. 14

2.5. Пересечение прямой и окружности.** Графический способ решения можно применять не только к системам линейных уравнений.

Пример 5. Решим графически систему

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=2,\\ x-3y-6=0.\end{cases}$$

Как вы знаете, уравнение

$$(x-1)^2+(y+1)^2=2$$

в координатной плоскости является уравнением окружности с центром $F(1;-1)$ и радиусом $R=\sqrt{2}$ (рис. 12).

Уравнение $x-3y-6=0$ или $y=\frac{1}{3}x-2$ является уравнением прямой, проходящей через точки $A(0;\ -2)$ и $B(3;\ -1)$ (рис. 13). Значит, решениями системы уравнений являются пары координат отмеченных на рис. 14 точек пересечения M и N окружности и прямой.

Таким образом, система имеет два решения, для которых приближённые значения $x_1\approx 0$; $y_1\approx -2$ и $x_2\approx 2{,}4$; $y_2\approx -1{,}2$.

Вопрос. Как показать, что указанные значения неизвестных x_1, y_1, x_2, y_2 дают точные решения системы из примера 5?

2.6. Графическое решение системы уравнений с модулем.**

Пример 6. Найдём, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases}|x|+|y|=2,\\ x-2y+2=0.\end{cases}$$

Сначала построим график уравнения $|x|+|y|=2$. Заметим, что если точка $(x_0;\ y_0)$ удовлетворяет этому уравнению, то точки $(x_0;\ -y_0)$, $(-x_0;\ y_0)$, $(-x_0;\ -y_0)$ также удовлетворяют этому уравнению. Отсюда следует, что график уравнения $|x|+|y|=2$ симметричен относительно осей координат

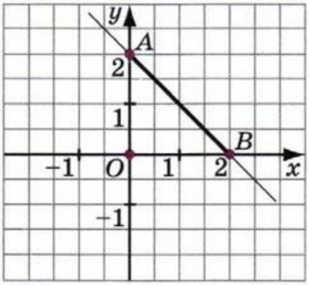


Рис. 15

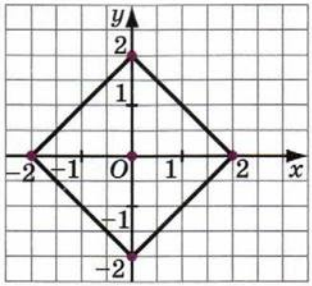


Рис. 16

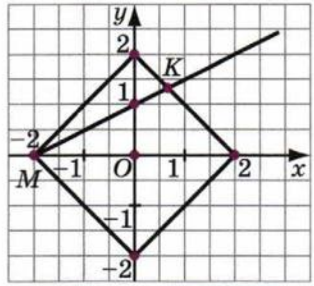


Рис. 17

Ox и Oy. Для построения части графика в 1-й четверти заменим $|x|$ на x, $|y|$ на y. В результате получим уравнение $x + y = 2$, графиком которого является прямая, изображённая на рис. 15. Отрезок AB этой прямой, лежащий в 1-й четверти, даёт часть графика уравнения $|x| + |y| = 2$ (рис. 15).

Отразив отрезок AB относительно оси Ox и затем отразив полученную ломаную относительно оси Oy, получим график уравнения $|x| + |y| = 2$ (рис. 16).

Уравнение $x - 2y + 2 = 0$ равносильно уравнению $y = \frac{1}{2}x + 1$. Построим прямую с уравнением $y = \frac{1}{2}x + 1$ и отметим точки M и K пересечения этой прямой с графиком уравнения $|x| + |y| = 2$ (рис. 17). Точка M имеет координаты $(-2; 0)$. Для точки K приближённое значение абсциссы равно 0,7, а приближённое значение ординаты равно 1,3.

Таким образом, наша система имеет два решения.

Вопрос. Каковы точные координаты точки K из примера 6?

Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется линейной?

2. Что представляет собой график линейной функции?

3. Какую прямую задаёт уравнение $y = a$, где a — число?

4. Какой вид на координатной плоскости имеет множество всех точек $(x; y)$ при $x = b$, где b — число?

5.* Какое множество точек задаёт уравнение $ax + by = c$? Укажите все возможности.

6. Как получить графически приближённые решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными?

7. Приведите пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которая:

а) имеет единственное решение;

б) не имеет решений;

в) имеет бесконечное множество решений, изображающееся точками некоторой прямой.

Задачи и упражнения

1. Решите систему графическим способом:

а) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 2, \\ -x + y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 3y = 2, \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

2.** Найдите, при каких числовых значениях a система имеет единственное решение:

а) $\begin{cases} 2x + 4y = a, \\ x + 2y = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ 6x + ay = 1. \end{cases}$

3. Покажите алгебраически и графически, что следующие системы имеют бесконечно много решений:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 3x - 3y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = 5, \\ \dfrac{3x}{2} - \dfrac{3y}{2} = 15. \end{cases}$

4. Составьте систему, которая вместе с уравнением $x + y = 1$ образовала бы систему:

а) имеющую единственное решение;

б) имеющую бесконечно много решений;

в) не имеющую решений.

5.** Исследуйте систему (в зависимости от числового значения a):

а) $\begin{cases} ax + y = 2, \\ ax - y = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - ay = 1, \\ 3x + ay = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x - ay = 1. \end{cases}$

6.* Решите систему графическим способом:

а) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| - |y| = 0, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x - 1| + |y| = 0, \\ (x - 2)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

7. Во дворе гуляют куры и овцы. Сколько кур и сколько овец гуляют во дворе, если известно, что у всех вместе 7 голов и 22 ноги?

8. Решите графически системы:

а) $\begin{cases}\frac{9}{5}x - 2y = 11,\\ 12x - 25y = 15;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x + 6y = 13,\\ 7x + 18y = -1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x + 0{,}2y = 1{,}1,\\ 3x - 0{,}2y = 0{,}9;\end{cases}$

г) $\begin{cases}7x + 12y = 20,\\ 7x - 8y = 0;\end{cases}$ д) $\begin{cases}2x - 33y = 44,\\ 10x + 33y = -11;\end{cases}$ е) $\begin{cases}15x + 23y + 10 = 0,\\ 3x + 4y + 2 = 0;\end{cases}$

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какой из приведённнных систем уравнений соответствует графическое решение на рис. 18?

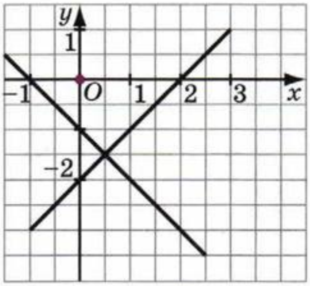


Рис. 18

1) $\begin{cases}x - y = 1,\\ x + y = 2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-x - y = 1,\\ -x + y = -2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x + y = -1,\\ x - y = 2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x + y = 2,\\ x - y = 1.\end{cases}$

1.2. При каком значении a система $\begin{cases}x + ay = 2,\\ 2x + 6y = 6\end{cases}$ имеет бесконечное число решений?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0.

1.3. При каком значении b система $\begin{cases}bx - 2y = 1,\\ 7x + y = 5\end{cases}$ не имеет решений?

1) 7; 2) −7; 3) 14; 4) −14.

1.4.* Укажите число a, для которого найдётся хотя бы одно такое число b, что пара $(a; b)$ является решением системы $\begin{cases}|2x| + |y| = 2\\ y = 2x + 1\end{cases}$:

1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Укажите уравнения, каждое из которых вместе с уравнением, заданным графиком на рис. 19, образуют систему, имеющую единственное решение:

1) $y = 3 + 4x$; 2) $y = 3 + 3x$; 3) $y = 4 + 3x$; 4) $y = -3 - 3x$.

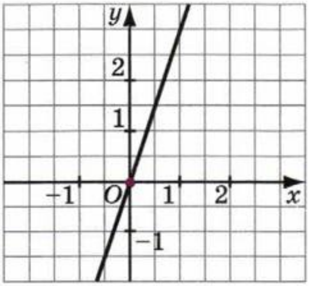


Рис. 19

2.2. Укажите уравнения, каждое из которых вместе с уравнением, заданным графиком на рис. 19, образуют систему, имеющую хотя бы одно решение:

1) $y = 30 - 2x$; 2) $y = 30 + 2x$;

3) $y = 60 - 2x$; 4) $y = 1 - 2x$.

2.3.* При каких парах значений a и b система $\begin{cases} ax + y = 2 \\ 2x - by = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение?

1) $a = -2,\ b = 1$; 2) $a = 2,\ b = 1$;

3) $a = -2,\ b = -1$; 4) $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$.

2.4.* Укажите все числа a, для каждого из которых найдётся хотя бы одно такое число b, что пара $(a; b)$ является решением системы $\begin{cases} |x| + |y| = 10, \\ x - y = 4. \end{cases}$

1) 3; 2) −3; 3) 5; 4) 7.

§ 3. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

3.1. Решение линейного уравнения в целых числах.

Пример 1. Во дворе гуляют куры и овцы. Сколько кур и сколько овец гуляют во дворе, если известно, что у них всего 22 ноги, а общее число кур и овец самое меньшее, какое может быть?

Обозначим через x число кур, а через y — число овец. Тогда общее число ног равно $2x + 4y$, откуда по условию $2x + 4y = 22$. Множество всех решений этого уравнения совпадает с множеством решений уравнения $x = 11 - 2y$. Тогда его решением является любая пара чисел $(11 - 2a;\ a)$, где a — произвольное число.

Однако по условию задачи нам нужны не всякие решения уравнения, а только такие, в которых значения x и y одновременно являются неотрицательными целыми числами.

Целочисленным решением уравнения $2x + 4y = 22$ является любая пара чисел $(11 - 2m;\ m)$, где m — произвольное целое число. Целые числа $11 - 2m$ и m будут неотрицательными только тогда, когда одновременно выполняются неравенства $0 \le m$, $0 \le 11 - 2m$. Отсюда получаем, что

$0 \le m \le 5$ и все целочисленные решения уравнения $2x + 4y = 22$, у которых оба значения неизвестных неотрицательны, исчерпываются парами (11; 0), (9; 1), (7; 2), (5; 3), (3; 4), (1; 5).

Запишем последовательно суммы $x + y$ для найденных неотрицательных целых решений: 11, 10, 9, 8, 7, 6.

Отсюда видно, что наименьшее число кур и овец равно 6, когда число овец равно 5, а курица одна.

Вопрос. Каким может быть наибольшее число кур и овец, если известно, что у них всего 22 ноги?

3.2. Целочисленные решения уравнения вида $ax = by$. Когда уравнение имеет вид $ax = by$, где a и b — ненулевые целые числа, нетрудно найти все его целочисленные решения.

Пример 2. Пусть имеется уравнение $14x = 6y$. Разделим обе части на число 2:

$$7x = 3y.$$

Так как x и y — целые числа, то из равенства $7x = 3y$ следует, что целое число $3y$ делится без остатка на число 7. Так как числа 7 и 3 взаимно просты, то это может быть только в том случае, когда число y делится на 7. Значит, $y = 7m$, где m — некоторое целое число.

Подставив $y = 7m$ в уравнение, получим $7x = 3 \cdot 7m$, откуда $x = 3m$. Так как m является целым числом, то $x = 3m$ тоже целое число.

Значит, числа $3m$, $7m$ при любом целом значении m дают целое решение $(3m;\ 7m)$ уравнения $7x = 3y$. Перебирая все целые значения m, можем получить любое целочисленное решение этого уравнения.

Вопрос. Какие решения в натуральных числах имеет рассмотренное уравнение?

3.3. Целочисленные решения линейного уравнения. Рассмотрим, как найти одно из целочисленных решений уравнения вида $ax + by = c$, где a, b, c — ненулевые целые числа, причём $|a|$ и $|b|$ взаимно просты.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $7x + 5y = 33$.

Выразим y через x:

$$y = \frac{33 - 7x}{5}.$$

Начнём последовательно подставлять вместо x подряд все целые числа, начиная с $x = 0$. В результате получится:

$y = \dfrac{33 - 7 \cdot 0}{5} = \dfrac{33}{5}$ — не целое число;

$y = \dfrac{33 - 7 \cdot 1}{5} = \dfrac{26}{5}$ — не целое число;

$y = \dfrac{33 - 7 \cdot 2}{5} = \dfrac{19}{5}$ — не целое число;

$y = \dfrac{33 - 7 \cdot 3}{5} = \dfrac{12}{5}$ — не целое число;

$y = \dfrac{33 - 7 \cdot 4}{5} = \dfrac{5}{5}$ — целое число.

Таким образом, пара чисел (4; 1) является целочисленным решением уравнения $7x + 5y = 33$.

Вопрос. Как показать, что уравнение $6x + 2y = 11$ не имеет целочисленных решений?

3.4. Существование целочисленных решений уравнения вида $ax + by = c$.** Любое уравнение вида $ax + by = c$ с целыми коэффициентами a, b, c имеет целочисленные решения, когда $|a|$ и $|b|$ — взаимно простые числа. Это можно доказать рассуждениями, которые продемонстрируем на примере уравнения $7x + 5y = 33$.

Запишем уравнение в виде $7x = 33 - 5y$ и рассмотрим 7 чисел: $33 - 5 \cdot 0$, $33 - 5 \cdot 1$, $33 - 5 \cdot 2$, $33 - 5 \cdot 3$, $33 - 5 \cdot 4$, $33 - 5 \cdot 5$, $33 - 5 \cdot 6$.

Предположим, что некоторые два из этих чисел дают одинаковые остатки при делении на 7, то есть $33 - 5k = 7p + r$ и $33 - 5l = 7g + r$. Тогда разность чисел $33 - 5k$ и $33 - 5l$ должна делиться на 7, потому что

$$(7p + r) - (7q + r) = 7p - 7q = 7(p - q).$$

С другой стороны, разность чисел $33 - 5k$ и $33 - 5l$ равна

$$(33 - 5 \cdot k) - (33 - 5 \cdot l) = 5l - 5k = 5(l - k).$$

Так как числа 5 и 7 взаимно просты, то из делимости числа $5(l - k)$ на 7 следует делимость числа $l - k$ на 7. Но этого не может быть, потому что $l \neq k$, $0 \leq l \leq 6$, $0 \leq k \leq 6$, а значит, $0 < |l - k| < 7$. Приходим к противоречию.

Следовательно, предположение о том, что некоторые два из чисел вида $33 - 5l$ при $0 < l < 6$ дают одинаковые остатки при делении на 7, было неверным.

Таким образом, числа $33 - 5 \cdot 0$, $33 - 5 \cdot 1$, $33 - 5 \cdot 2$, $33 - 5 \cdot 3$, $33 -5 \cdot 4$, $33 - 5 \cdot 5$, $33 - 5 \cdot 6$ при делении на 7 дают семь различных остатков. Но при делении на 7 могут получаться только следующие остатки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Их тоже семь. Значит, одно из записанных чисел при делении на 7 даёт остаток 0, то есть делится на 7.

В нашем примере таким числом является $33 - 5 \cdot 1$, так как $33 - 5 \cdot 1 = 7 \cdot 4$. Записав последнее равенство в виде $7 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 33$, приходим к уже известному целочисленному решению $(4; 1)$ уравнения $7x + 5y = 33$.

Вопрос. Как доказать, что числа ab и $(a + 7)(b + 7)$, где a и b — целые числа, дают одинаковые остатки при делении на 7?

3.5. Множество всех целочисленных решений уравнения вида $ax + by = c$.** На примере уравнения $7x + 5y = 33$ покажем, как находить все целочисленные решения, если известно одно из них.

В пункте 3.3 мы нашли одно целочисленное решение $(4; 1)$ этого уравнения. Это означает, что выполняется равенство $7 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 33$.

Пусть $(p; q)$ — ещё какое-нибудь целочисленное решение уравнения $7x + 5y = 33$. Тогда выполняется равенство $7p + 5q = 33$. Вычитая из обеих частей этого равенства соответствующие части равенства $7 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 33$, получим

$$(7p + 5q) - (7 \cdot 4 + 5 \cdot 1) = 33 - 33 \text{ или}$$
$$7p - 7 \cdot 4 + 5q - 5 \cdot 1 = 0,$$
$$7(p - 4) + 5(q - 1) = 0.$$

Следовательно, пара чисел $(p - 4; q - 1)$ является решением уравнения $7x + 5y = 0$ или уравнения $7x = -5y$. Так как числа 7 и 5 взаимно просты, то все целочисленные решения уравнения $7x + 5y = 0$ можно записать в виде $(-5m; 7m)$, где m — любое целое число. Значит, для некоторого числа m должны выполняться равенства $p - 4 = -5m$, $q - 1 = 7m$. Отсюда следует, что формулы

$$p = 4 - 5m,$$
$$q = 1 + 7m,$$

где m — целое число, задают все целочисленные решения уравнения $7x + 5y = 33$. Например, если $m = -2$, то $p = 4 - 5 \cdot (-2) = 14$ и $q = 1 + 7 \cdot (-2) = -13$. Нетрудно проверить, что равенство

$$7 \cdot 14 + 5 \cdot (-13) = 33$$

на самом деле верно.

Вопрос. Как показать, что формулы $x = 4 + 5k$, $y = 1 - 7k$, где k — целое число, также задают все целые решения уравнения $7x + 5y = 33$?

3.6. Решение уравнения $x^2 + 15^2 = y^2$ в натуральных числах.** Решением уравнений в целых числах математики занимались с древних времён. Например, древнегреческий математик Пифагор изучал прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами. Теорема Пифагора позволяет свести решение этой задачи к решению уравнения $x^2+y^2=z^2$ в целых числах. Найти все решения этого уравнения непросто. Разберём только один частный случай.

Пример 4. Найдём все решения уравнения $x^2+15^2=z^2$ в натуральных числах.

Запишем уравнение в виде

$$z^2-x^2=15^2.$$

Воспользуемся формулой

$$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$

и перепишем уравнение в виде

$$(z+x)(z-x)=15^2.$$

При натуральных значениях z и x числа $z+x$ и $z-x$ в этом равенстве тоже натуральные, причём в произведении дают число 15^2. Поэтому $z+x$ является одним из делителей числа 15^2, и частное от деления 15^2 на $z+x$ даёт число $z-x$, которое меньше $z+x$. Выпишем все делители числа 15^2:

$$1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 25,\ 75,\ 225.$$

Для натуральных чисел z, x, $z+x$, $z-x$ справедливо неравенство $z+x>z-x$. Поэтому, если $z+x\le 15$, то $z-x<15$ и произведение $(z+x)\cdot(z-x)<15^2$.

Таким образом, остаётся рассмотреть три случая:

если $z+x=225$, то $z-x=1$;

если $z+x=75$, то $z-x=3$;

если $z+x=25$, то $z-x=9$.

Дальнейшее решение уравнения $x^2+15^2=z^2$ сводится к решению трёх систем:

$$\begin{cases} z+x=225,\\ z-x=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z+x=75,\\ z-x=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z+x=25,\\ z-x=9. \end{cases}$$

Решением $(x; z)$ для первой системы является пара чисел (113; 112), для второй системы — пара чисел (36; 39), для третьей системы — пара чисел (8; 17).

В результате получаем следующие равенства:

$$112^2 + 15^2 = 113^2;$$
$$36^2 + 15^2 = 39^2;$$
$$8^2 + 15^2 = 17^2.$$

Обе части второго равенства удаётся разделить на 3^2 и получить более простое равенство:

$$12^2 + 5^2 = 13^2.$$

Вопрос. Какие решения в натуральных числах имеет уравнение $x^2 - y^2 = 2012$?

Контрольные вопросы и задания

1. Что вы понимаете под словами «целочисленное решение уравнения с двумя неизвестными»?

2. Приведите пример уравнения $ax + by = 0$ с целыми коэффициентами и запишите все его целочисленные решения.

3. Как можно найти целочисленное решение уравнения $4x - 13y = 5$?

4.** Пусть a и b взаимно просты. Как записать все целочисленные решения уравнения $ax + by = c$, зная некоторое его решение $(p; q)$?

5.** При каких условиях уравнение $ax + by = c$ имеет целочисленные решения?

Задачи и упражнения

1. Найдите какое-либо целочисленное решение уравнения:
а) $2y = 3x - 2$; б) $2y = 5x - 3$; в) $7x = 3y + 5$;
г) $9x + 3y = 33$; д) $5x + 15y = 17$.

2. Найдите какие-либо два целочисленных решения уравнения:
а) $y = 2x$; б) $y = 2x + 4$; в) $2x + y + 1 = 0$;
г) $x + y + 1 = 0$; д) $x - 2y + 2 = 0$.

3.* Найдите все целочисленные решения уравнения:
а) $2x + 5y = 3$; б) $x + 2y = 1$; в) $3x + y = 2$.
г) $7x + 3y = 5$; д) $15x - 9y = 27$; е) $8x - 12y = 20$;
ё) $13x - 2y = 2$; ж) $17x + 13y = 5$; з) $17x - 11y = 5$.

4.* Докажите, что уравнение не имеет целочисленных решений:
а) $3x + 6y = 5$; б) $2x + 6y = 1$; в) $5x + 10y = 3$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какие из указанных пар являются целочисленными решениями уравнения $5x = 9y$ (m — переменная, принимающая все целые значения)?

1) $(5m; -9m)$; 2) $(5m; 9m)$; 3) $(9m; -5m)$; 4) $(9m; 5m)$.

1.2. Какая из указанных пар является решением уравнения $5x - 3y = 2000$?

1) $(994; 998)$; 2) $(995; 997)$; 3) $(996; 996)$; 4) $(997; 995)$.

1.3.* Пары чисел $(19 - 5m; 3m + 8)$, где m — целое число, являются решением уравнения $3x - ay = 17$ в целых числах. Чему равно a?

1) 3; 2) 5; 3) −3; 4) −5.

1.4.* Пары чисел $(2m + 1; 9m - 1)$, где m — целое число, являются решением уравнения $9x - by = a$ в целых числах. Чему равны a и b?

1) 11 и 2; 2) 3 и −7; 3) 9 и 11; 4) −2 и 11.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.** Какие из указанных пар являются записью всех целочисленных решений уравнения $3x - 2y = 7$ в целых числах (m — переменная, принимающая все целые значения)?

1) $(2m - 1; 3m - 5)$; 2) $(2m + 1; 3m - 2)$;
3) $(2m + 3; 3m + 1)$; 4) $(2m + 5; 3m + 4)$.

2.2. Для каких из приведённых уравнений некоторыми решениями в целых числах являются пары вида $(-2m; 3m)$, где m — переменная, принимающая все целые значения?

1) $6x - 4y = 0$; 2) $6x + 4y = 0$;
3) $9x - 6y = 0$; 4) $9x + 6y = 0$.

2.3.* Для каких из следующих уравнений существуют решения в целых числах со значениями переменных x и y разных знаков?

1) $5y + 9x = 11$; 2) $12x - 5y = -18$;
3) $5x - y = 9$; 4) $9x - 4y = -14$.

2.4.* Какие из следующих уравнений имеют решения вида $(am + 3; bm + 4)$, где m — переменная, принимающая все целые значения, a и b — некоторые фиксированные целые числа?

1) $7x + 5y = 11$; 2) $7x + 12y = 69$;
3) $14x + 13y = 94$; 4) $13x + 17y = 108$.

Глава 13

МНОГОУГОЛЬНИКИ

В этой главе вы вспомните многие известные свойства многоугольников, познакомитесь с понятием угла многоугольника, узнаете некоторые новые приёмы вычисления площадей.

§ 1. ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

1.1. Четырёхугольник. Вспомним, как получается четырёхугольник.

Возьмём четыре различные точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой (рис. 1). Затем последовательно соединим их отрезками так, чтобы несоседние отрезки не пересекались, а последняя точка была соединена с первой.

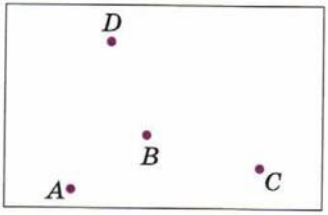


Рис. 1

Таким способом можно получить, например, четырёхугольник $ABCD$ (рис. 2).

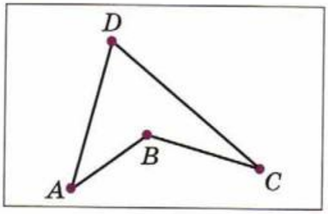


Рис. 2

Выбранные точки называют вершинами четырёхугольника, а проведённые отрезки — сторонами четырёхугольника.

Вопрос. Какие четырёхугольники, имеющие особые названия, вы знаете?

1.2. Выпуклые и невыпуклые четырёхугольники. Рассмотрим на рис. 3 четырёхугольник $EFGH$. Через сторону четырёхугольника $EFGH$ проведём прямую. Четырёхугольник $EFGH$ окажется в одной полуплоскости относительно этой прямой, то есть прямая не разделяет четырёхугольник на две части.

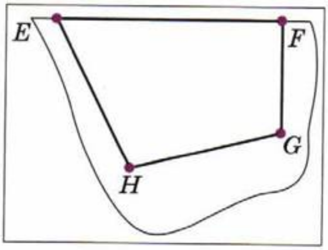


Рис. 3

Четырёхугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей сторону четырёхугольника.

Рассмотрим на рис. 4 четырёхугольник $MNKL$. Прямая, проведённая через сторону ML, разделит четырёхугольник на две части.

Поэтому четырёхугольник $MNKL$ не является выпуклым. Иногда говорят, что четырёхугольник $MNKL$ — *невыпуклый* четырёхугольник.

Вопрос. Что вы можете сказать о диагоналях невыпуклого четырёхугольника?

1.3.* Выпуклая четырёхугольная область. Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Возьмём сначала полуплоскость α с границей AB, содержащую четырёхугольник $ABCD$ (рис. 5), затем полуплоскость β с границей BC, содержащую четырёхугольник $ABCD$ (рис. 6), затем полуплоскость γ с границей CD (рис. 7), содержащую четырёхугольник $ABCD$, и, наконец, полуплоскость δ с границей AD, содержащую четырёхугольник $ABCD$ (рис. 8).

Общие точки всех полуплоскостей α, β, γ, δ лежат либо внутри четырёхугольника $ABCD$, либо на его границе. Поэтому пересечением всех четырёх полуплоскостей является выпуклая *четырёхугольная область,* закрашенная на рис. 9.

Сам четырёхугольник называют *границей* своей четырёхугольной области.

Вопрос. Как задать треугольную область пересечением полуплоскостей?

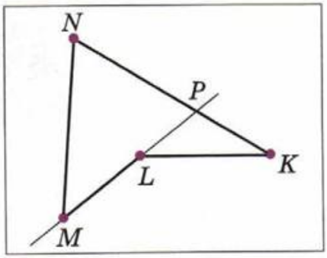


Рис. 4

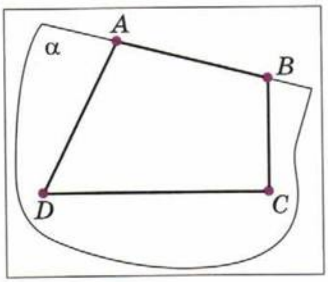


Рис. 5

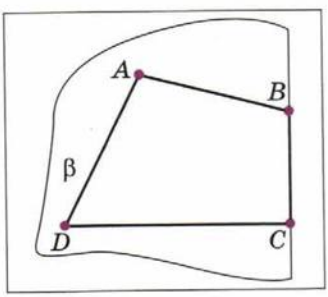


Рис. 6

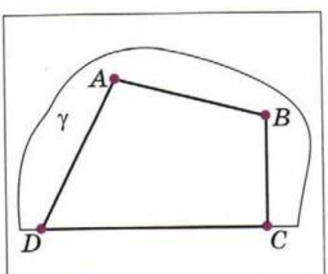


Рис. 7

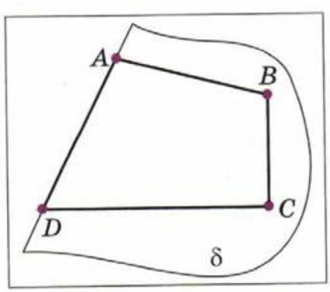


Рис. 8

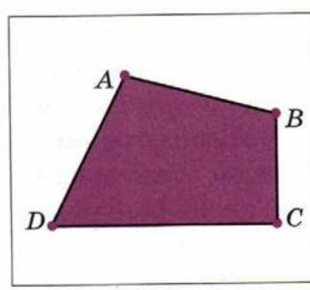


Рис. 9

1.4. Внутренние углы выпуклого четырёхугольника. Напомним, что в треугольнике MNK внутренним углом, например, при вершине M называют тот плоский угол NMK, который содержит этот треугольник. Аналогично определяют внутренние углы и для выпуклого четырёхугольника.

Рассмотрим вершину A выпуклого четырёхугольника $ABCD$. *Внутренним углом* четырёхугольника $ABCD$ при вершине A называют плоский угол, содержащий многоугольник $ABCD$, сторонами которого являются лучи AB и AD (рис. 10). Так как этот плоский угол содержится в полуплоскости, то его градусная мера находится в границах от 0° до 180°.

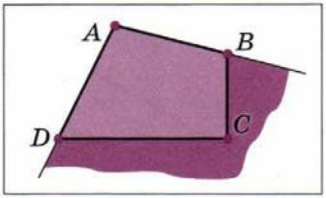


Рис. 10

Аналогично определяется внутренний угол при любой другой вершине выпуклого четырёхугольника. Каждый внутренний угол выпуклого четырёхугольника имеет градусную меру от 0° до 180°.

Вопрос. Как задать внутренний угол выпуклого четырёхугольника пересечением полуплоскостей?

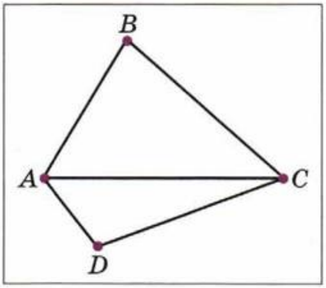


Рис. 11

1.5. Сумма углов выпуклого четырёхугольника. В пункте 3.4 главы 6 рассматривалось несколько способов нахождения суммы величин углов конкретного четырёхугольника. То же значение суммы, равное 360°, получится для любого выпуклого четырёхугольника.

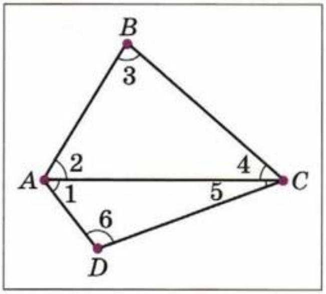


Рис. 12

Теорема. **Сумма величин всех внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.**

Доказательство. Разобьём выпуклый четырёхугольник $ABCD$ диагональю AC на два треугольника ABC и ADC (рис. 11).

Сумма величин всех углов в треугольниках ABC и ADC равна $2 \cdot 180°$.

Запишем эту сумму углов, пользуясь обозначениями рис. 12:

$$(\angle 2 + \angle 3 + \angle 4) + (\angle 1 + \angle 5 + \angle 6) = 2 \cdot 180°.$$

Отсюда

$$(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 + (\angle 4 + \angle 5) + \angle 6 = 2 \cdot 180°$$

или

$$\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 2 \cdot 180° = 360°.$$

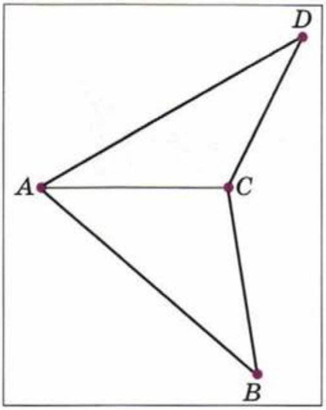


Рис. 13

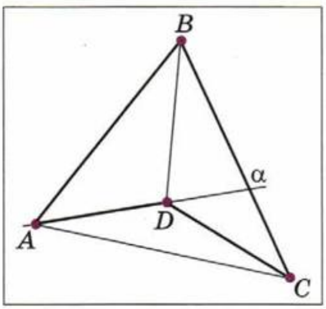


Рис. 14

Эту теорему иногда формулируют так:

Сумма всех внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

Вопрос. Чему равна сумма всех углов треугольников ABC и ADC на рис. 13?

1.6.* Диагонали невыпуклого четырёхугольника. Рассмотрим невыпуклый четырёхугольник $ABCD$. Найдётся такая сторона четырёхугольника, что проведённая по ней прямая разделяет четырёхугольник на две части, то есть некоторые две вершины четырёхугольника попадают в различные полуплоскости относительно прямой a. Например, на рис. 14 вершины B и C лежат по разные стороны от прямой a, содержащей сторону AD.

Проведя отрезок BD, получим диагональ четырёхугольника $ABCD$, которая проходит внутри четырёхугольника. Другая диагональ AC проходит вне четырёхугольника $ABCD$.

Вопрос. Как вы понимаете слова «внутренние точки четырёхугольника»?

1.7.* Внутренние углы невыпуклого четырёхугольника. Напомним, что внутренним углом треугольника ABC между сторонами AB и AC называют плоский угол, определяемый лучами AB и AC, содержащий треугольник ABC. Аналогично определялись внутренние углы выпуклого четырёхугольника. Однако подобное определение не годится для невыпуклого четырёхугольника. Например, четырёхугольник $ABCD$, изображённый на рис. 15, обладает тем свойством, что каждый из двух плоских углов, образованных соседними сторонами BC и CD, содержит только часть этого четырёхугольника (рис. 16 и 17).

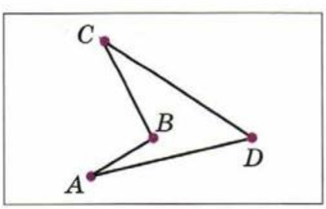


Рис. 15

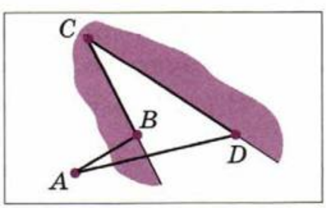


Рис. 16

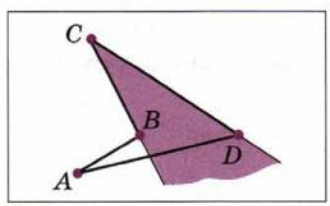


Рис. 17

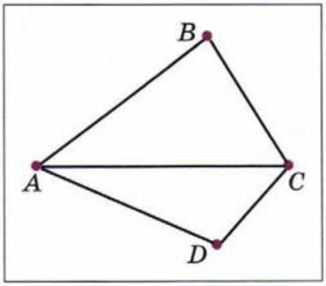


Рис. 18

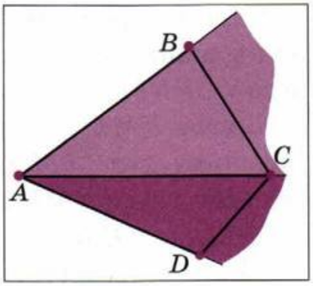


Рис. 19

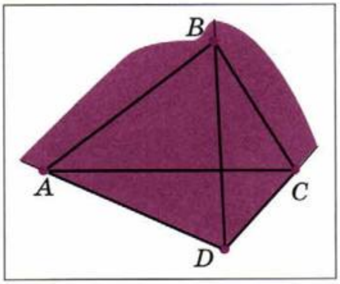


Рис. 20

Рассмотрим другой способ вычисления величин внутренних углов выпуклого четырёхугольника. Возьмём выпуклый четырёхугольник $ABCD$ и проведём его диагональ, например диагональ AC, разрезающую четырёхугольник $ABCD$ на два треугольника ABC и ADC (рис. 18).

Внутренний угол ABC этого четырёхугольника тот же, что и внутренний угол ABC треугольника ABC. Аналогично внутренний угол ADC этого четырёхугольника тот же, что и внутренний угол ADC треугольника ADC.

Далее, плоский угол BAD, содержащий четырёхугольник $ABCD$, равен сумме внутреннего угла BAC треугольника ABC и внутреннего угла DAC треугольника ADC (рис. 19). Следовательно, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$. Аналогично плоский угол BCD, содержащий четырёхугольник $ABCD$, равен сумме внутреннего угла BCA треугольника ABC и внутреннего угла ACD треугольника ADC и $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$.

Заметим, что если в четырёхугольнике $ABCD$ провести диагональ BD, то величины углов ABC и ADC также выражаются через углы треугольников ABD и DCB: $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$, $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$ (рис. 20).

Этот подход применим к определению внутренних углов невыпуклого четырёхугольника. Рассмотрим невыпуклый четырёхугольник $KLMN$, диагональ KM которого расположена внутри четырёхугольника (рис. 21).

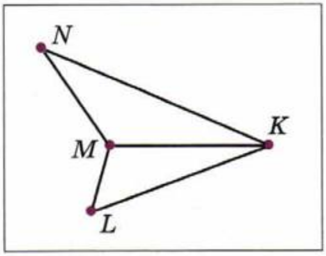


Рис. 21

Внутренним углом этого четырёхугольника при вершине N будем считать внутренний угол MNK треугольника MNK; внутренним углом при вершине L будем считать внутренний угол MLK треугольника MLK.

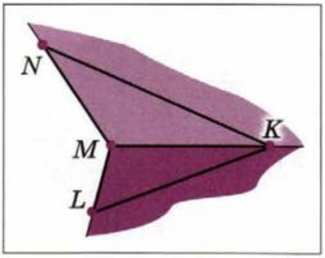


Рис. 22

Внутренним углом этого четырёхугольника при вершине M будем считать сумму внутреннего угла NMK треугольника MNK и внутреннего угла KML треугольника MLK (рис. 22). Величину угла LMN определяем как сумму величин углов NMK и KML, то есть $\angle LMN = \angle NMK + \angle KML$.

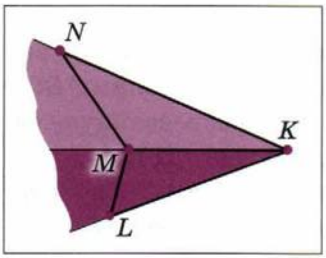


Рис. 23

Внутренним углом этого четырёхугольника при вершине K будем считать сумму внутреннего угла NKM треугольника MNK и внутреннего угла MKL треугольника MLK (рис. 23). Величину угла NKL определяем как сумму величин углов NKM и MKL, то есть $\angle NKL = \angle NKM + \angle MKL$.

Вопрос. Как показать, что невыпуклый четырёхугольник имеет хотя бы один внутренний угол, больший 180°?

1.8.* Сумма внутренних углов любого четырёхугольника. Рассмотрим невыпуклый четырёхугольник $KLMN$, диагональ KM которого расположена внутри четырёхугольника (рис. 23). Из определения внутренних углов четырёхугольника следует, что сумма величин внутренних углов четырёхугольника $KLMN$ равна сумме величин всех внутренних углов треугольников MNK и MLK, то есть равна $2 \cdot 180° = 360°$.

С учётом теоремы из пункта 1.5 получаем общую формулировку.

Теорема. **Сумма внутренних углов любого четырёхугольника равна 360°.**

Вопрос. Как объяснить, что четырёхугольник не может иметь двух внутренних углов, каждый из которых больше развёрнутого?

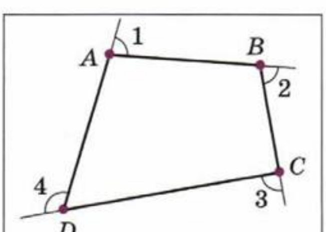


Рис. 24

1.9. Сумма внешних углов выпуклого четырёхугольника. *Внешним углом* выпуклого четырёхугольника называют угол, смежный внутреннему углу четырёхугольника.

При каждой вершине найдутся два внешних угла четырёхугольника, равных по величине.

Рассмотрим в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ по одному внешнему углу при каждой вершине, например, как на рис. 24. Тогда

$$\angle 1 = 180° - \angle DAB, \quad \angle 2 = 180° - \angle ABC,$$
$$\angle 3 = 180° - \angle BCD, \quad \angle 4 = 180° - \angle CDA.$$

Поэтому

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 =$$
$$= 180° - \angle DAB + 180° - \angle ABC + 180° - \angle BCD + 180° - \angle CDA =$$
$$= 4 \cdot 180° - (\angle DBA + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA).$$

В скобках стоит сумма всех внутренних углов четырёхугольника, которая равна 360°. Следовательно,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 4 \cdot 180° - 360° = 360°.$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. **Сумма внешних углов выпуклого четырёхугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.**

Вопрос. Чему равна сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине?

Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется четырёхугольник?

2. Какой четырёхугольник называют выпуклым?

3. Какой четырёхугольник называют невыпуклым?

4.* Что такое выпуклая четырёхугольная область?

5. Что такое внутренний угол четырёхугольника?

6.* Как определяются внутренние углы невыпуклого четырёхугольника?

7. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника?

8. Какой угол называют смежным с данным выпуклым углом?

9. Какой угол называют внешним углом выпуклого четырёхугольника?

10. Чему равна сумма внешних углов выпуклого четырёхугольника, взятых по одному при каждой вершине?

11.* Докажите теорему о сумме внутренних углов любого четырёхугольника.

Задачи и упражнения

1. Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырёхугольником.

2.* Докажите, что трапеция является выпуклым четырёхугольником.

3.** Докажите, что диагонали невыпуклого четырёхугольника не пересекаются, а диагонали любого выпуклого четырёхугольника пересекаются.

4.* Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что периметр треугольника AMC меньше периметра треугольника ABC.

5.** Внутри треугольника ABC выбраны три произвольные точки M, N, K. Докажите, что периметр треугольника MNK меньше периметра треугольника ABC.

6.* Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ найдите точку M такую, что сумма $AM + BM + CM + DM$ принимает наименьшее значение.

7.** В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали взаимно перпендикулярны и $AB + CD = AD + BC$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ имеет ось симметрии.

8. Найдите внутренние углы выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если известно, что:

а) $\angle ABC = 36°$, $\angle BCA = 89°$, $\angle ACD = 25°$, $\angle ADC = 131°$;

б) $\angle ABD = 43°$, $\angle CBD = 21°$, $\angle ADB = 55°$, $\angle BDC = 74°$;

в)* $\angle ABC + \angle BCD = 223°$, $\angle BCD + \angle CDA = 197°$,

$\angle CDA + \angle BAD = 137°$, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$.

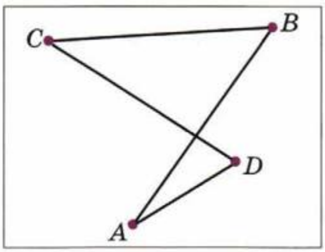


Рис. 25

9. Известно, что $\angle BAD = 23°$, $\angle ABC = 51°$, $\angle BCD = 36°$ (рис. 25). Найдите $\angle CDA$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В треугольнике два внутренних угла равны 57° и 68°. Чему равна величина третьего внутреннего угла треугольника?

1) 55°; 2) 65°; 3) 75°; 4) 85°.

1.2. Точки A, B, C, D являются вершинами невыпуклого четырёхугольника. Сколько всего различных невыпуклых четырёхугольников можно получить, по-разному соединяя эти точки?

1) один; 2) два; 3) три; 4) четыре.

1.3.* В четырёхугольнике три внутренних угла имеют величину по 30°. Чему равна величина четвёртого внутреннего угла этого четырёхугольника?

1) 210°; 2) 230°; 3) 250°; 4) 270°.

1.4. В выпуклом четырёхугольнике три внешних угла равны по 100°. Чему равна величина четвёртого внешнего угла?

1) 60°; 2) 70°; 3) 80°; 4) 90°.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Сколько тупых углов может иметь выпуклый четырёхугольник?

1) один; 2) два; 3) три; 4) четыре.

2.2. Даны величины трёх внутренних углов четырёхугольника. В каких случаях четырёхугольник не является выпуклым?

1) $60°, 80°, 90°$; 2) $20°, 120°, 130°$; 3) $40°, 50°, 60°$; 4) $30°, 40°, 150°$.

2.3. При каких из указанных условий четырёхугольник $ABCD$ обязательно является выпуклым?

1) $AB \parallel CD$;

2) $AB = BC$ и $AD = DC$;

3) сумма трёх из четырёх углов четырёхугольника равна $270°$;

4) $\angle ABC = \angle ADC$ и $\angle BAD = \angle BCD$.

2.4. При каких из указанных условий четырёхугольник $ABCD$ обязательно будет равнобедренной трапецией?

1) $AB = CD$ и $AD \neq BC$;

2) $\angle BAD = \angle ABC$, $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle ABC \neq 90°$;

3) $AB \parallel CD$ и $AD = BC$;

4) $AB = CD$, $AC = BD$ и $AD \neq BC$.

§ 2. ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

2.1. Вычисление площади четырёхугольника. В каждом выпуклом или невыпуклом четырёхугольнике можно провести диагональ, которая разбивает четырёхугольник на два треугольника. Тем самым вычисление площади четырёхугольника можно свести к задаче на вычисление площадей треугольников.

Вопрос. Чему равна площадь четырёхугольника $ABCD$, у которого диагонали взаимно перпендикулярны и равны соответственно 6 см и 7 см (рис. 1)?

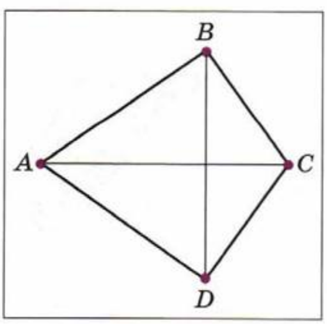


Рис. 1

2.2.* Построение треугольника, равновеликого заданному четырёхугольнику. Произвольный четырёхугольник можно превратить в равновеликий по площади треугольник и тем самым задачу на вычисление площади четырёхугольника свести к задаче на вычисление площади одного треугольника.

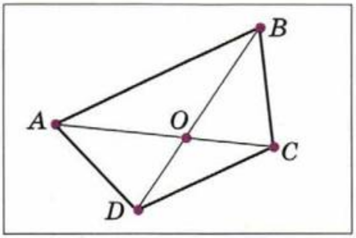


Рис. 2

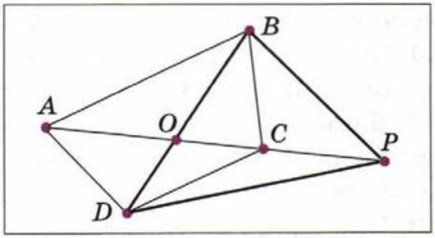


Рис. 3

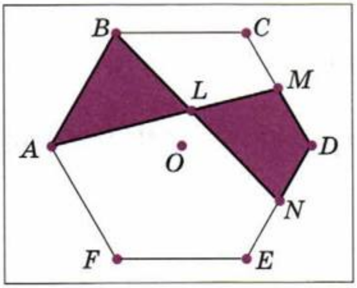


Рис. 4

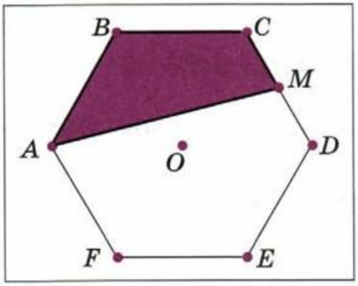


Рис. 5

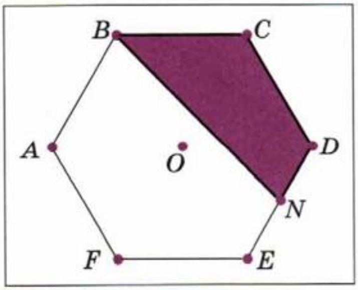


Рис. 6

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Обозначим буквой O точку пересечения прямых, содержащих его диагонали (рис. 2).

На прямой, проходящей через точки A и C, от точки O отложим отрезок OP, равный диагонали AC (рис. 3).

Площадь треугольника OBP равна площади треугольника ABC, так как высоты этих треугольников, опущенные из точки B, совпадают, а основания AC и OP равны. Аналогично площадь треугольника ODP равна площади треугольника ADC. Следовательно, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна площади треугольника BPD.

Вопрос. Как для невыпуклого четырёхугольника $ABCD$ получить равновеликий ему треугольник?

2.3. Пример доказательства равенства площадей.** Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$. Отметим точку M — середину CD и точку N — середину DE. Проведём отрезки AM и BN, пересекающиеся в точке L. Докажем, что площадь четырёхугольника $LNDM$ равна площади треугольника ABL (рис. 4).

Возьмём четырёхугольник $ABCM$ (рис. 5). Повернём его вокруг центра O шестиугольника на 60° по ходу часовой стрелки (рис. 6). Так как при таком повороте точка A перейдёт в точку B, точка B перейдёт в точку C, точка C перейдёт в точку D и середина отрезка CD перейдёт в середину отрезка DE, то четырёхугольник $ABCM$ при указанном повороте займёт положение четырёхугольника $BCDN$. Следовательно, четырёхугольники $ABCM$ и $BCDN$ равны, а поэтому их площади тоже равны. Площадь треугольника ABL можно получить, вычитая из площади четырёхугольника $ABCM$ площадь четырёхугольника $BCML$ (рис. 7). Площадь четырёхугольника $LNDM$ можно получить, вычитая из площади четырёхугольника $BCDM$ площадь четырёхугольника $BCML$ (рис. 8). Следовательно,

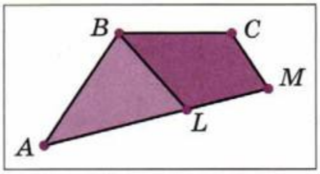


Рис. 7

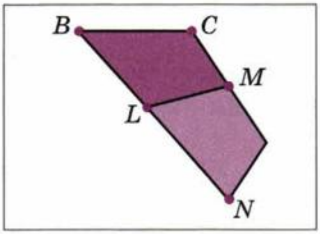


Рис. 8

$$S_{\Delta ABL} = S_{ABCM} - S_{BCML} = S_{BCDN} - S_{BCML} = S_{LNDM},$$

что и требовалось доказать.

Вопрос. Как доказать, что на рис. 4 угол ALB равен $60°$?

2.4.* Отношение площадей. В некоторых задачах важно обращать внимание на отношение площадей.

Пример. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ площади 60 см^2 пересекаются в точке M (рис. 9), причём

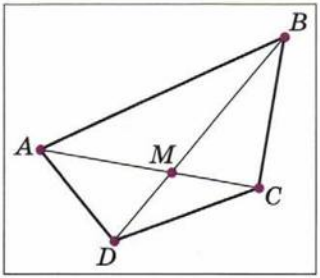


Рис. 9

$$AM : MC = 3 : 2,\ BM : MD = 2 : 1.$$

Найдём площади треугольников, на которые диагоналями разбит четырёхугольник.

Обозначим площадь треугольника AMD буквой x, то есть $S_{\Delta AMD} = x$.

Если основаниями треугольников AMD и CMD считать стороны AM и CM, то проведённые к ним высоты совпадают. Поэтому $S_{\Delta AMD} : S_{\Delta CMD} = AM : CM = 3 : 2$ или $x : S_{\Delta CMD} = 3 : 2$. По свойству пропорции получаем $2 \cdot x = 3 \cdot S_{\Delta CMD}$, откуда $S_{\Delta CMD} = \frac{2}{3}x$.

Аналогично:

$$S_{\Delta AMD} : S_{\Delta AMB} = MD : MB = 1 : 2 \text{ или } x : S_{\Delta AMB} = 1 : 2,\ 2x = 1 \cdot S_{\Delta AMB},\ S_{\Delta AMB} = 2x,$$

$$S_{\Delta CMD} : S_{\Delta CMB} = DM : BM = 1 : 2 \text{ или } \frac{2}{3} \cdot x : S_{\Delta CBM} = 1 : 2,\ \frac{2}{3} \cdot x = S_{\Delta CMB},$$

$$S_{\Delta CMB} = \frac{4}{3} \cdot x.$$

Так как

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta BCM} + S_{\Delta CDM} + S_{\Delta ADM},$$

то $60 = 2x + \frac{4}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot x + x$, откуда $60 = 5x$, $x = 12$.

Таким образом, $S_{\Delta AMD} = x = 12$ (см^2);

$$S_{\Delta CMD} = \frac{2}{3} \cdot x = 8 \text{ (см}^2\text{)}; \; S_{\Delta AMB} = 2x = 24 \text{ (см}^2\text{)}; \; S_{\Delta CMB} = \frac{4}{3} \cdot x = 16 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Вопрос. Чему в рассмотренном примере равно отношение высот треугольников ABC и ADC, проведённых к общей стороне AC?

Контрольные вопросы и задания

1. По какой формуле вычисляется площадь треугольника?
2. По какой формуле вычисляется площадь параллелограмма?
3. По какой формуле вычисляется площадь трапеции?
4. Как можно вычислить площадь четырёхугольника?
5.* Как превратить четырёхугольник в равновеликий ему треугольник?

Задачи и упражнения

1. На рис. 10 известно, что $\angle ADB = \angle DCB = 90°$, $AD = 12$ см, $AB = 13$ см, $BC = 3$ см. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

2. Диагонали прямоугольника длиной 24 см пересекаются под углом в 60°. Найдите площадь прямоугольника.

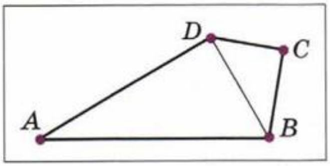


Рис. 10

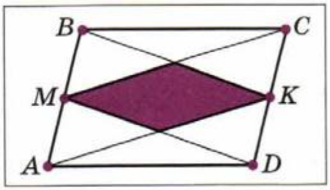


Рис. 11

3. Постройте параллелограмм, равновеликий заданному треугольнику.

4. Постройте параллелограмм, равновеликий заданной трапеции.

5. Постройте треугольник, равновеликий заданной трапеции.

6. Постройте треугольник, равновеликий данному параллелограмму.

7.* Постройте параллелограмм, равновеликий заданному четырёхугольнику.

8. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон AB и CD, как отмечено на рис. 11. Найдите площадь заштрихованной на рисунке части, если площадь параллелограмма равна S.

9. Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть равных по площади треугольников.

10. В треугольнике ABC площади S проведена средняя линия MN, параллельная стороне AB (рис. 12). Найдите площадь четырёхугольника $ABMN$.

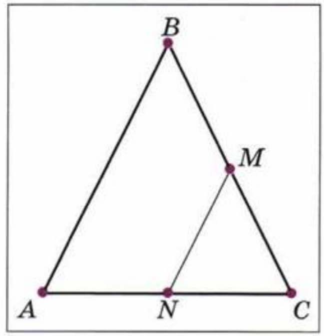


Рис. 12

11.* В треугольнике ABC известны $AB = 4$ см, $AC = 7$ см и площадь 10 см^2. Точки M на стороне AB и N на стороне AC расположены так, что $AM = 3$ см, $AN = 4$ см. Найдите площадь четырёхугольника $BMNC$.

12.** В треугольнике ABC известны $AB = c$, $AC = b$ и площадь S. Точки M на луче AB и N на луче AC расположены так, что $AM = m$, $AN = n$. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами B, C, M, N.

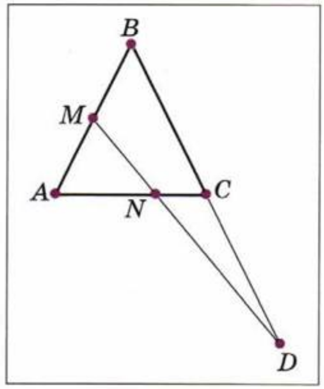


Рис. 13

13. В треугольнике ABC через вершину A проведите прямую, делящую площадь треугольника пополам.

14. Разделите треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через заданную вершину треугольника.

15.** Выразите площадь параллелограмма через две его высоты h и H и периметр P.

16. На рис. 13 точка M — середина стороны AB, $CD = BC$. Докажите, что площади треугольников AMN и CND равны.

17.* Известно, что $CD : DB = 1 : 3$ и $S_{\Delta CND} = S_{\Delta AMN}$ (рис. 14). Найдите отношение $AM : MB$.

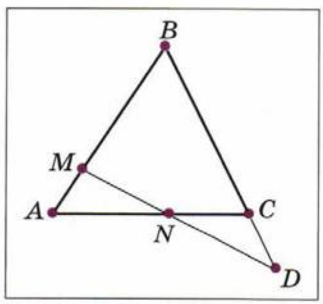


Рис. 14

18.* Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ разбивается диагоналями на четыре треугольника ABM, BCM, CDM, ADM, площади которых соответственно равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1S_3 = S_2S_4$.

19.* Выпуклый четырёхугольник разбили диагоналями на четыре треугольника, подсчитали площадь каждого из треугольников и получили следующие значения: 1994 см^2, 1995 см^2, 1996 см^2, 1997 см^2. Докажите, что при подсчётах была допущена ошибка.

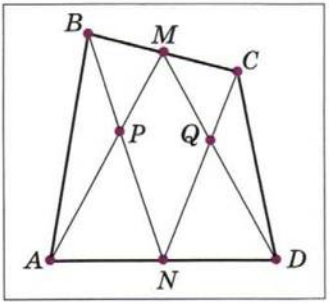


Рис. 15

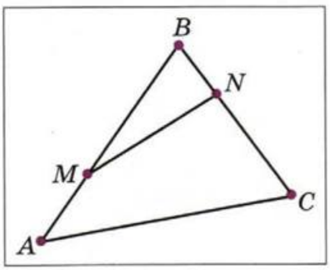


Рис. 16

20.** На рис. 15 точки M и N — середины сторон BC и AD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что площадь четырёхугольника $PMQN$ равна сумме площадей треугольников ABP и CDQ.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равна площадь трапеции с основаниями 5 см и 7 см и высотой 2 см?

1) 10 см^2; 2) 12 см^2; 3) 20 см^2; 4) 24 см^2.

1.2. Чему равна площадь четырёхугольника, составленного из двух равнобедренных треугольников с общим основанием 6 см и проведёнными к нему высотами 5 см и 7 см?

1) 24 см^2; 2) 36 см^2; 3) 48 см^2; 4) 72 см^2.

1.3. В треугольнике ABC, площадь которого равна 54 см^2, медианы пересекаются в точке P. Чему равна площадь невыпуклого четырёхугольника $APBC$?

1) 18 см^2; 2) 24 см^2; 3) 27 см^2; 4) 36 см^2.

1.4. В треугольнике ABC, площадь которого равна 18 см^2, на сторонах AB и BC выбраны точки M и N так, что $AM : MB = BN : NC = 1 : 2$ (рис. 16). Чему равна площадь четырёхугольника $AMNC$?

1) 9 см^2; 2) 12 см^2; 3) 14 см^2; 4) 16 см^2.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В каких из указанных случаев трапеция с основаниями a, b и высотой h имеет площадь больше 20 см^2?

1) $a = 4$ см, $b = 3$ см, $h = 5$ см; 2) $a = 6$ см, $b = 4$ см, $h = 3$ см;
3) $a = 7$ см, $b = 9$ см, $h = 3$ см; 4) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $h = 7$см.

2.2. Какую площадь может иметь невыпуклый четырёхугольник $ABCD$, если известно, что площадь треугольника ABC равна 28 см^2, площадь треугольника ADC равна 15 см^2?

1) 13 см^2; 2) 17 см^2; 3) 37 см^2; 4) 43 см^2.

2.3. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, на стороне AB выбираются точки M и N так, что точка M расположена между точками

A и N. При каких отношениях $AM : MN : NB$ площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{3}S$?

1) $AM : MN : NB = 1 : 2 : 3$;
2) $AM : MN : NB = 5 : 4 : 3$;
3) $AM : MN : NB = 5 : 3 : 1$;
4) $AM : MN : NB = 7 : 5 : 4$.

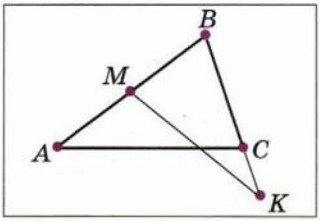


Рис. 17

2.4. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB, точка K расположена на продолжении стороны BC (рис. 17). При каких отношениях $CK : KB$ площадь треугольника MBK больше площади треугольника ABC?

1) $CK : KB = 3 : 4$; 2) $CK : KB = 1 : 3$;
3) $CK : KB = 11 : 18$; 4) $CK : KB = 2 : 5$.

§ 3. МНОГОУГОЛЬНИКИ

3.1. Примеры многоугольников. Чтобы получить пятиугольник, можно взять пять различных точек (рис. 1) и последовательно соединить их пятью отрезками так, что последняя точка будет соединена с первой. Если при этом окажется, что никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой, а никакие два не соседних отрезка не имеют общих точек, то полученную фигуру будем называть пятиугольником.

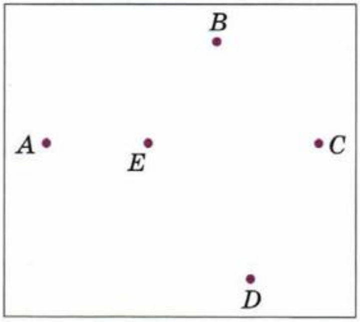


Рис. 1

Например, таким способом по точкам, изображённым на рис. 1, можно получить пятиугольник $ABCDE$, изображённый на рис. 2: последовательно соединим точку A с точкой B, точку B с точкой C, точку C с точкой D, точку D с точкой E и точку E с точкой A.

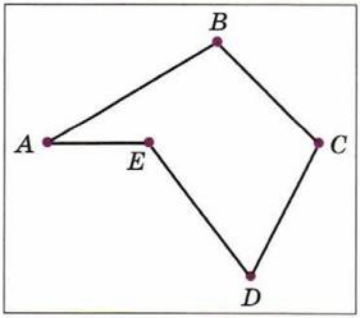


Рис. 2

Этот же пятиугольник получится, если мы соединим сначала точку E с точкой D, затем точку D с точкой C и так далее.

Аналогично можно определить шестиугольник, семиугольник и многоугольник любым заданным числом вершин.

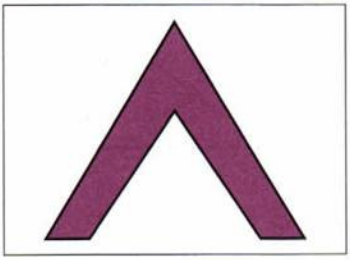


Рис. 3

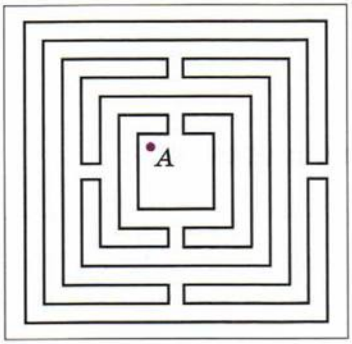


Рис. 4

Многоугольник обладает следующими характеристическими свойствами:

1) каждая сторона содержит только две точки, принадлежащие другим сторонам;

2) каждая вершина является общей точкой только для двух сторон;

3) никакие две соседние стороны не лежат на одной прямой;

4) из каждой вершины, двигаясь по сторонам, можно дойти до любой другой вершины.

Вопрос. Сколько вершин, сколько сторон и сколько диагоналей имеет десятиугольник?

3.2. Многоугольная область. Часть плоскости, ограниченная многоугольником, называется многоугольной областью.

Например, на рис. 3 заштрихована шестиугольная область.

Сам многоугольник обычно называют границей своей многоугольной области.

Вопрос. В каком случае четырёхугольная область является пересечением полуплоскостей?

3.3.* Необычный пример многоугольника. Кажется очевидным, что многоугольник делит плоскость на две части. Это соответствует действительности, но далеко не очевидно и совсем непросто доказывается.

Посмотрите на рис. 4. На рисунке изображён многоугольник и отмечена точка A. Где находится эта точка, вне многоугольника или внутри его? Сразу ответить на такой вопрос трудно.

Вопрос. Какую многоугольную область ограничивает многоугольник, изображённый на рис. 4?

3.4. Выпуклый многоугольник. Многоугольник называют выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей сторону этого многоугольника.

Примером выпуклого многоугольника может служить любой правильный шестиугольник, то есть такой шестиугольник, у которого все стороны равны между собой и все углы равны между собой.

Вопрос. Что вы знаете о правильном шестиугольнике?

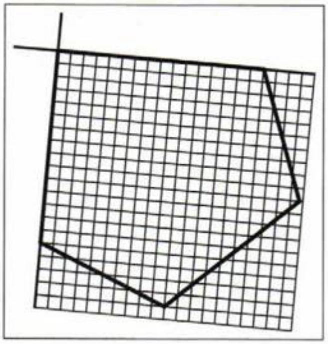


Рис. 5

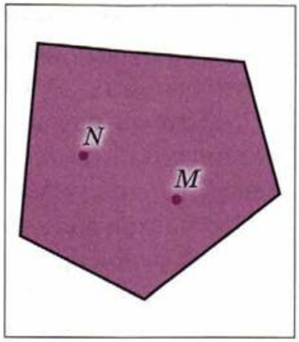


Рис. 6

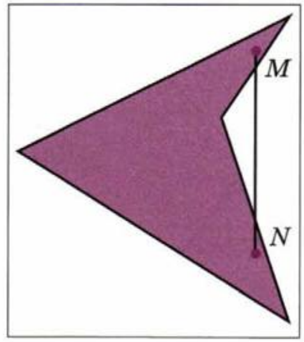


Рис. 7

3.5.* Задание выпуклого многоугольника пересечением полуплоскостей. В пункте 1.3 было показано, как получить выпуклую четырёхугольную область пересечением четырёх полуплоскостей.

Аналогично для произвольного выпуклого многоугольника можно взять каждую сторону, провести через неё прямую и рассмотреть полуплоскость, содержащую многоугольник (рис. 5). Пересечением всех таких полуплоскостей будет *выпуклая* многоугольная область, границей которой является данный многоугольник. Например, на рис. 6 изображена выпуклая пятиугольная область.

Вопрос. Как доказать, что если взять две точки M и N выпуклой многоугольной области, то все точки отрезка MN содержатся в этой области?

3.6. Общее понятие выпуклости.** Геометрическая фигура называется *выпуклой*, если для любых двух точек A и B этой фигуры все точки отрезка AB принадлежат этой фигуре.

Четырёхугольная область на рис. 7 не является выпуклой, потому что можно найти такие две точки этой области, например M и N, что не все точки отрезка MN содержатся в данной области.

Примером выпуклой фигуры является многоугольная область, изображённая на рис. 6, потому что в этой области вместе с любыми точками M и N содержатся все точки отрезка MN. Выпуклыми фигурами являются, например, круг и закрашенная на рис. 8 часть плоскости.

Вопрос. Как доказать, что общая часть двух выпуклых фигур, образованная при их пересечении, является выпуклой фигурой?

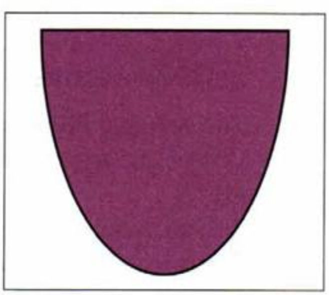


Рис. 8

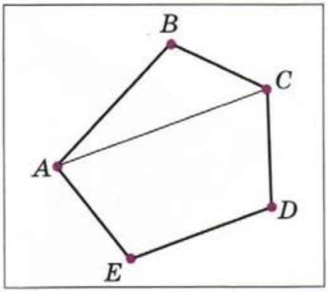


Рис. 9

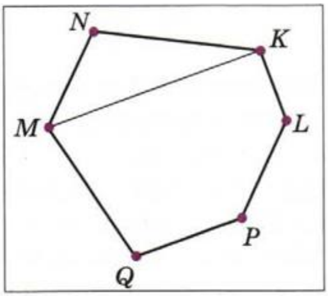


Рис. 10

3.7. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника. Рассмотрим выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Проведём диагональ AC, которая разбивает каждый из углов A и C пятиугольника на две части (рис. 9). Отсюда следует, что сумму всех внутренних углов пятиугольника можно найти, если сложить сумму всех углов треугольника ABC и сумму всех углов четырёхугольника $ACDE$. Так как сумма углов треугольника ABC равна $180°$, а сумма углов четырёхугольника равна $360°$, то сумма внутренних углов пятиугольника равна

$$180° + 360° = 180° + 2 \cdot 180° = 3 \cdot 180°.$$

Аналогично, если теперь рассмотрим выпуклый шестиугольник $MNKLPQ$ и проведём диагональ MK (рис. 10), то получим, что сумма всех внутренних углов шестиугольника равна сумме всех углов треугольника MKN и всех углов пятиугольника $MKLPQ$, то есть

$$180° + 3 \cdot 180° = 4 \cdot 180°.$$

Продолжая таким образом, получим, что сумма внутренних углов выпуклого семиугольника равна $5 \cdot 180°$, выпуклого восьмиугольника равна $6 \cdot 180°$ и так далее.

Полученный результат запишем в виде теоремы.

Сумма всех внутренних углов выпуклого n-угольника равна

$$(n - 2) \cdot 180°.$$

Вопрос. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

Контрольные вопросы и задания

1. Как можно получить пятиугольник?

2. Могут ли какие-то три вершины пятиугольника лежать на одной прямой?

3. Что такое многоугольная область?

4. Какой многоугольник называют выпуклым?

5.** Что такое выпуклая геометрическая фигура?

6.** В каком случае плоский угол будет выпуклой фигурой?

7. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого n-угольника?

8.* Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

Задачи и упражнения

1. На сторонах равностороннего треугольника ABC строятся равные равнобедренные треугольники так, что их основания совпадают со сторонами треугольника ABC, а вершины лежат внутри этого треугольника (рис. 11). При каком угле α при основаниях боковые стороны равнобедренных треугольников образуют шестиугольник?

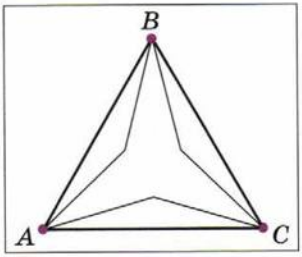


Рис. 11

2. На сторонах равностороннего треугольника ABC во внешнюю часть строятся равные равнобедренные треугольники с углом α при основании. При каком угле α стороны равнобедренных треугольников образуют правильный шестиугольник?

3.* На сторонах ромба $ABCD$ с острым углом в $60°$ строятся равные равнобедренные треугольники с основаниями, совпадающими со сторонами ромба. Выясните, какими могут быть углы этих равнобедренных треугольников, чтобы все их боковые стороны образовывали восьмиугольник, если известно, что:

а) все треугольники строятся вне ромба;

б) все треугольники строятся внутри ромба;

в) треугольники с основаниями AB и CD строятся вне ромба, а треугольники с основаниями BC и AD — внутри ромба.

4.** Внутри квадрата $ABCD$ расположен некоторый стоугольник, ограничивающий стоугольную область. Произвольную точку M плоскости соединили отрезком с вершиной A и подсчитали число точек пересечения отрезка MA с границей стоугольника. Докажите, что если точка M не лежит на границе стоугольника и число точек пересечения нечётно, то точка M лежит внутри стоугольной области.

5. Найдите внутренние углы правильного:

а) пятиугольника; б) восьмиугольника; в) девятиугольника;

г) двенадцатиугольника; д) двадцатиугольника.

6.* У каких правильных n-угольников внутренние углы выражаются целым числом градусов?

7.** Существует ли правильный многоугольник с внутренним углом в $(180 - 10^{-6})$ градусов?

8.** Докажите, что круг является выпуклой геометрической фигурой.

9.** В каком случае объединение двух отрезков даёт выпуклую геометрическую фигуру?

10.** Как объяснить, что выпуклыми геометрическими фигурами являются: а) отрезок; б) луч; в) прямая.

11.** Как объяснить, что если геометрические фигуры G_1 и G_2 являются выпуклыми, то возможен только один из следующих случаев:

а) G_1 и G_2 не имеют общих точек;

б) G_1 и G_2 имеют единственную общую точку;

в) общая часть фигур G_1 и G_2 является выпуклой фигурой.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В пятиугольнике $ABCDE$ внутренние углы при вершинах A, B, C — прямые и $\angle CDE = 120°$ (рис. 12). Чему равна величина угла AED?

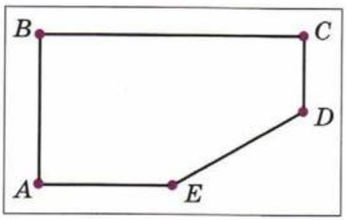


Рис. 12

1) 120°; 2) 130°; 3) 140°; 4) 150°.

1.2. В невыпуклом четырёхугольнике $ABCD$ один из внутренних углов равен 210°, остальные три внутренних угла равны между собой. Чему равна величина этих углов?

1) 40°; 2) 45°; 3) 50°; 4) 55°.

1.3.* Какое наибольшее число внутренних прямых углов может иметь шестиугольник?

1) три; 2) четыре; 3) пять; 4) шесть.

1.4. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого шестиугольника?

1) 630°; 2) 720°; 3) 810°; 4) 900°.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Сколько острых внутренних углов может иметь выпуклый пятиугольник?

1) два; 2) три; 3) четыре; 4) один.

2.2.* На рис. 13 изображены четыре стороны шестиугольника $ABCDEF$, причём известно, что $AB = BC = CD = DE$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 120°$. При каких из указанных значений величины угла DEF этот шестиугольник не может быть выпуклым?

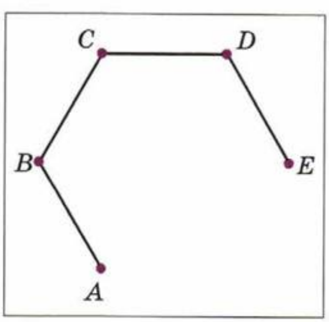


Рис. 13

1) $\angle DEF = 75°$; 2) $\angle DEF = 85°$;
3) $\angle DEF = 95°$; 4) $\angle DEF = 105°$.

2.3. Шестиугольник $ABCDEF$ составлен из двух равных трапеций с общим основанием AD. При каких из указанных значений оснований этот четырёхугольник не может быть выпуклым?

1) $AD = 3$ см, $BC = 4$ см; 2) $AD = 5$ см, $BC = 3$ см;
3) $AD = 6$ см, $BC = 5$ см; 4) $AD = 7$ см, $BC = 3$ см.

2.4. В окружность с центром O вписан некоторый правильный многоугольник, одной из сторон которого является отрезок AB. Какие из указанных значений может принимать величина угла AOB?

1) 6°; 2) 7°; 3) 8°; 4) 9°.

§ 4. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

4.1. Площади многоугольников на клетчатой бумаге. Вы учились вычислять площади многих геометрических фигур.

Если на клетчатой бумаге изобразить «жука», как на рис. 1, то, разбивая «жука» на треугольники, параллелограммы, трапеции и находя их площади по известным формулам, можно найти общую площадь «жука».

При правильных вычислениях получится $42k^2$.

Вопрос. Как можно вычислять площадь фигуры, имеющей ось симметрии?

4.2. Формула Пика.** С многоугольниками на клетчатой бумаге, вершины которых расположены в узлах, связаны некоторые интересные закономерности. Так, площадь «жука» можно найти новым способом.

Подсчитаем число M узлов, которые лежат строго внутри «жука», и получим $M = 18$ (рис. 2).

Подсчитаем число K узлов, которые лежат на границе «жука», и получим $K = 50$ (рис. 3).

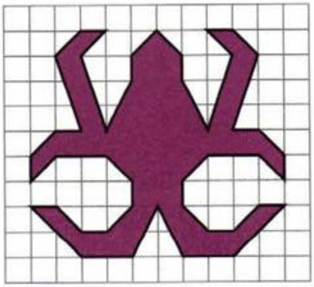


Рис. 1

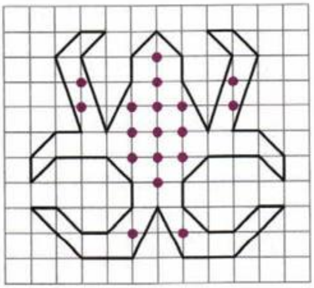


Рис. 2

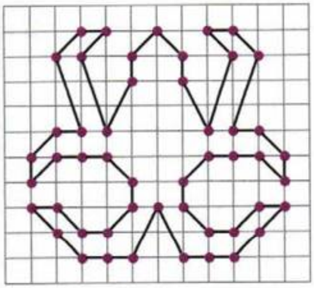


Рис. 3

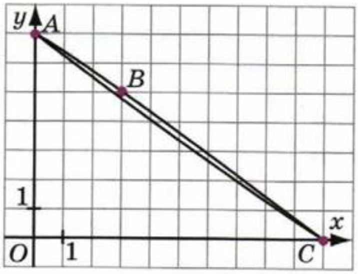


Рис. 4

После этого площадь «жука» можно вычислить по *формуле Пика*

$$S = M + \frac{K}{2} - 1,$$

подставив в неё $M = 18$ и $K = 50$. В результате получим

$$S = 18 + \frac{50}{2} - 1 = 42\ (k^2).$$

Это значение совпадает с тем, которое приведено в предыдущем пункте.

Вопрос. Как с помощью формулы Пика объяснить, что на координатной плоскости треугольник с вершинами в точках $A(0;\ 7)$, $B(3;\ 5)$, $C(10;\ 0)$ не содержит ни одной точки с целочисленными координатами за исключением вершин треугольника (рис. 4)?

4.3.* Пример на вычисление площади дополнением фигуры до треугольника. Теоретически площадь любого многоугольника можно найти, разбивая многоугольник на треугольники. На практике это не всегда удобно. Разберём некоторые другие возможности.

Найдём площадь шестиугольника $ABCDEF$, у которого все углы равны по $120°$ и $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $CD = 10$ см, $DE = 10$ см (рис. 5).

Продолжим стороны BC, DE, AF таким образом, чтобы получился равносторонний треугольник MNK, как на рис. 6. Одновременно образуются ещё три равносторонних треугольника — AMB, CND, EFK.

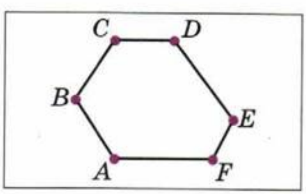


Рис. 5

Найдём стороны этих треугольников:

$$MB = AB = MA = 6 \text{ см};$$
$$NC = CD = ND = 10 \text{ см};$$
$$MN = MB + BC + CN = 6 + 8 + 10 = 24 \text{ (см)};$$
$$NK = MK = MN = 24 \text{ см};$$
$$EK = NK - DN - DE = 24 - 10 - 10 = 4 \text{ (см)};$$
$$FE = FK = EK = 4 \text{ см}.$$

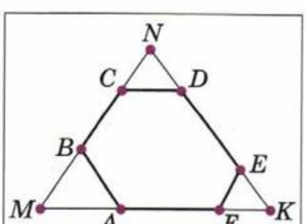


Рис. 6

Воспользуемся формулой

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

площади равностороннего треугольника со стороной a, которая была получена в пункте 4.7 главы 5. Тогда

$$S_{\Delta MNK} = \frac{24^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}\ (\text{см}^2);$$

$$S_{\Delta MAB} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ (\text{см}^2);$$

$$S_{\Delta CND} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}\ (\text{см}^2);$$

$$S_{\Delta EFK} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Следовательно, площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна

$$S = 144\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 25\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 106\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Вопрос. Чему равна площадь шестиугольника $ABCDEF$ с точностью до 1 см^2?

4.4. Площадь описанного многоугольника. Для описанного около окружности многоугольника можно получить удобную для практического применения формулу площади.

Возьмём, например, пятиугольник $ABCDE$, описанный около окружности радиуса R. Соединим центр окружности с вершинами и проведём радиусы OH, OM, ON, OK, OL в точки касания, как на рис. 7.

Запишем площади треугольников:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot R;$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot R;$$

$$S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot R;$$

$$S_{\Delta DOE} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot R;$$

$$S_{\Delta AOE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot OL = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot R.$$

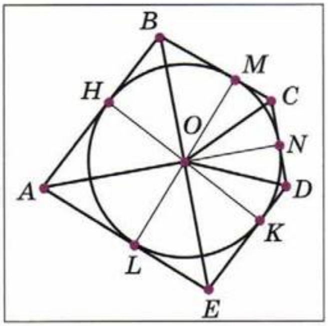


Рис. 7

Так как площадь пятиугольника равна сумме найденных площадей, то

$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot R + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot R + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot R + \frac{1}{2} \cdot DE \cdot R + \frac{1}{2} \cdot AE \cdot R =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot R \cdot (AB + BC + CD + DE + AE).$$

В скобках получили периметр пятиугольника.

Аналогичное рассуждение можно провести для любого описанного многоугольника и получить следующее правило.

Площадь описанного многоугольника равна половине произведения радиуса окружности на периметр многоугольника.

Вопрос. Чему равно значение периметра квадрата, выраженное через радиус вписанной окружности?

4.5. Применение площади к вычислению радиуса вписанной окружности. Рассмотрим треугольник на рис. 8. Введём обозначения:

a, b, c — стороны треугольника;

$P = a + b + c$ — периметр треугольника;

$p = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$ — полупериметр треугольника;

r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

В этих обозначениях полученное в предыдущем пункте правило вычисления площади можно записать в виде формулы:

$$S = pr.$$

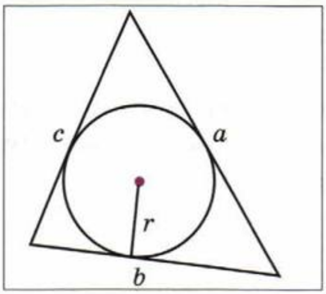


Рис. 8

Таким образом, площадь треугольника равна произведению радиуса вписанной окружности на полупериметр.

Пример 1. Найдём радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник со сторонами 5 см, 12 см, 13 см. Тогда $P = 30$ см, $p = 15$ см. Площадь S треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ (см^2) (рис. 9). По формуле $S = pr$, где r — радиус вписанной окружности. Следовательно,

$$r = \frac{S}{P} = \frac{30}{15} = 2 \text{ (см)}.$$

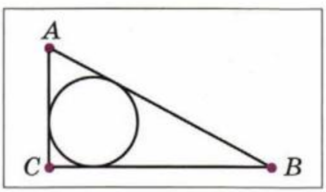


Рис. 9

Вопрос. Чему равен радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 10 см и боковой стороной 13 см?

4.6. Вычисление площадей фигур, ограниченных отрезками. Иногда приходится находить площади фигур, которые не являются многоугольниками, но граница которых состоит из отрезков.

Например, такой фигурой является рамка на рис. 10.

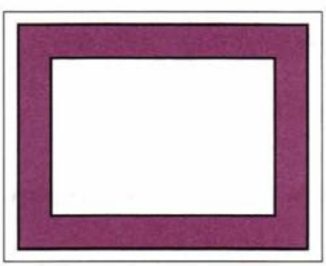


Рис. 10

Площадь рамки можно найти, если разбить её на известные геометрические фигуры.

Пусть $AB = 6$ см, $BC = 11$ см и ширина рамки равна 1 см. Разобьём рамку на трапеции так, как на рис. 11. Тогда

$$S_{ABMN} = S_{CDLK} = \frac{1}{2}(AD + MN) \cdot 1 = 5 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{BCKN} = S_{ADLM} = \frac{1}{2}(AD + ML) \cdot 1 = 10 \text{ (см}^2\text{)}.$$

После этого вычислим площадь рамки: $S = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 30$ (см^2).

Вопрос. Как бы вы ещё вычислили площадь этой рамки?

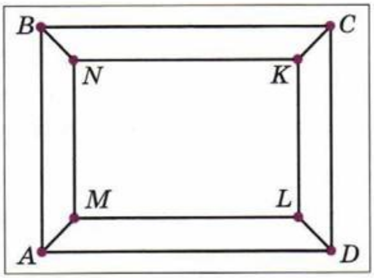


Рис. 11

Контрольные вопросы и задания

1. Как можно вычислять площадь многоугольной области на клетчатой бумаге?

2.* По какой формуле можно вычислять площадь равностороннего треугольника?

3. По какой формуле можно вычислять площадь описанного около окружности многоугольника?

4. Как вычислить радиус вписанной в треугольник окружности, зная периметр и площадь треугольника?

5.** Какой вид имеет формула Пика для вычисления площади многоугольной области на клетчатой бумаге?

Задачи и упражнения

1. Найдите площадь фигуры, изображённой:

а) на рис. 12; б) на рис. 13; в) на рис. 14; г) на рис. 15.

Рис. 12

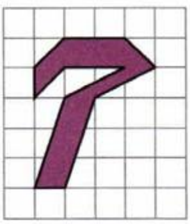


Рис. 13

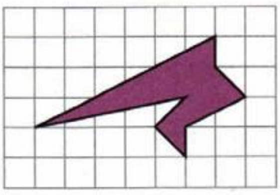


Рис. 14

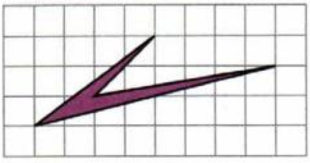


Рис. 15

2.** Вспомните содержание пункта 4.2. Пусть M — число узлов клетчатой бумаги, находящейся внутри многоугольной области с вершинами в узлах сетки, K — число узлов на границе, включая вершины, и S — площадь многоугольной области. Последовательно докажите, что формула $S = M + \frac{K}{2} - 1$ справедлива:

а) для любого прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки;

б) для любого прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки;

в) для любого треугольника;

г) для объединения двух неперекрывающихся треугольников с общей стороной;

д) для любой многоугольной области.

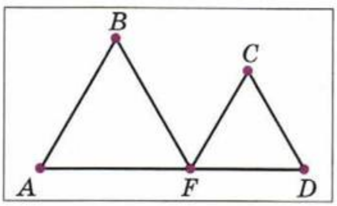


Рис. 16

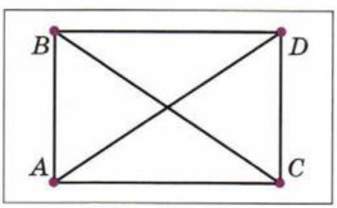


Рис. 17

3.* На рис. 16 равносторонние треугольники ABF и FCD расположены так, что точки A, F, D лежат на одной прямой. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $AF = 5$ см, $FD = 3$ см.

4.* Два равных прямоугольных треугольника ABC и ACD имеют площадь 3 см^2 каждый и расположены так, как на рис. 17. Найдите площадь:

а) пересечения их треугольных областей;

б) объединения их треугольных областей.

5.* На сторонах прямоугольника $ABCD$ со сторонами a и b во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABM, BCN, CDK, ADL. Найдите площадь четырёхугольника $MNKL$.

6. Середина одной из диагоналей выпуклого четырёхугольника соединена с концами другой диагонали. Докажите, что полученная ломаная делит четырёхугольник на две равные по площади части.

7.** Построить четырёхугольник, равновеликий заданному пятиугольнику.

8. Периметр описанного около окружности многоугольника 60 см, а площадь многоугольника 240 см^2. Найдите радиус окружности.

9. Около окружности радиуса 25 мм описан многоугольник площади 20 см^2. Найдите периметр многоугольника.

10.* Выразите квадрат стороны правильного шестиугольника через его площадь S.

11.* Середины сторон правильного шестиугольника последовательно соединены между собой, так что получается меньший шестиугольник. Найдите площадь меньшего шестиугольника, если:

а) сторона большего шестиугольника равна 4 см;

б) площадь большего шестиугольника равна $20\sqrt{3}$ см^2.

12.* Пол комнаты, который представляет из себя прямоугольник со сторонами 7,48 м и 3,25 м, нужно застелить паркетом в форме квадратов со стороной 12 см. При каком количестве паркетных плиток их общая площадь будет больше площади комнаты?

13.* Для правильного шестиугольника со стороной 2 в некоторых единицах измерения длины строятся описанная и вписанная окружности. Докажите, что площадь кольца между этими окружностями в соответствующих единицах измерения площади равна π.

14. Найдите площадь заштрихованной фигуры с вершинами в узлах сетки:

а) на рис. 18; б) на рис. 19; в) на рис. 20.

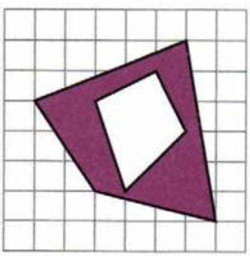


Рис. 18

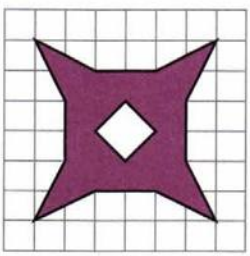


Рис. 19

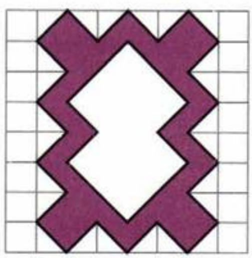


Рис. 20

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.* Чему равна площадь правильного шестиугольника со стороной 4 см?

1) $4\sqrt{3}$ см^2; 2) $8\sqrt{3}$ см^2; 3) $16\sqrt{3}$ см^2; 4) $24\sqrt{3}$ см^2.

1.2. Чему равна площадь ромба со стороной 9 см, описанного вокруг окружности с радиусом 1 см?

1) 12 см^2; 2) 18 см^2; 3) 24 см^2; 4) 36 см^2.

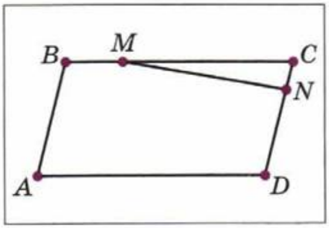


Рис. 21

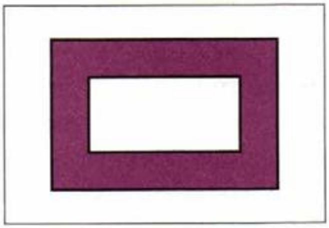


Рис. 22

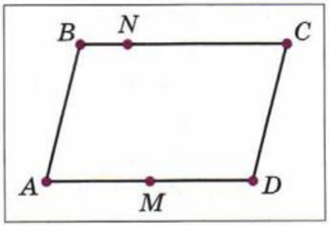


Рис. 23

1.3. Чему равен радиус r окружности, вписанной в ромб со стороной 5 см и диагоналями длиной 6 см и 8 см?

1) $r = 2{,}2$ см; 2) $r = 2{,}4$ см; 3) $r = 2{,}6$ см; 4) $r = 2{,}8$ см.

1.4.* В параллелограмме $ABCD$, площадь которого равна 32 см^2, на сторонах BC и CD отмечены точки M и N так, что $BM : MC = CN : ND = 1 : 3$ (рис. 21). Чему равна площадь пятиугольника $ABMND$?

1) 28 см^2; 2) 29 см^2; 3) 30 см^2; 4) 31 см^2.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных чисел являются приближёнными значениями $\sqrt{3}$ с избытком?

1) 1,6; 2) 1,7; 3) 1,8; 4) 1,9.

2.2. Какие из указанных значений может иметь длина высоты, проведённой к стороне AB треугольника ABC, если известно, что $BC = \sqrt{10}$ см?

1) 2 см; 2) 3 см; 3) 4 см; 4) 5 см.

2.3. Из прямоугольника со сторонами a и b вырезали рамку шириной 1 см (рис. 22). При каких значениях a и b площадь рамки равна 20 см^2?

1) $a = 5$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 6$ см, $b = 7$ см;

3) $a = 7$ см, $b = 5$ см; 4) $a = 4$ см, $b = 8$ см.

2.4. В параллелограмме $ABCD$ отмечены середина M стороны AD и некоторая внутренняя точка N стороны BC (рис. 23). Какие из указанных отношений не могут быть отношением площади трапеции $ABNM$ к площади трапеции $MNCD$?

1) 1 : 4; 2) 1 : 3; 3) 1 : 2; 4) 2 : 3.

Глава 14

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

В этой главе вы познакомитесь с исходными понятиями вычислительной математики: приближениями, погрешностями, округлением, приближёнными вычислениями. Вам станет понятно, что работа калькулятора основана на простых математических формулах и закономерностях.

§ 1. ПРИБЛИЖЁННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ПОГРЕШНОСТИ

1.1. О приближённом измерении величин. Задача измерения величин непроста даже тогда, когда значения измеряемых величин выражаются целыми числами, а само измерение сводится к счёту. Сравнительно просто пересчитать число учеников в классе или число страниц в не очень толстой тетради. Попробуйте, однако, сосчитать число зёрен в килограмме риса!

В подобных ситуациях прибегают к специальным приёмам, облегчающим процедуру счёта, но дающим лишь приблизительное, ориентировочное значение. Можно, например, сосчитать число зёрен в одном грамме риса, а результат умножить на 1000.

Попытки получить абсолютно точный результат в данном случае совершенно бессмысленны: стоит взять рис помельче или слегка ошибиться при взвешивании — и ответ станет другим. Иногда приближённое значение легче себе представить и запомнить. К примеру, для указания количества зёрен в килограмме риса число 220 000 использовать гораздо удобнее, чем 223 561 или 218 734.

Вопрос. В каких единицах обычно измеряют площадь комнаты?

1.2. Последовательные приближения сверху и снизу. Методы приблизительного подсчёта больших количеств возникли, в частности, в связи с задачами измерения таких величин, как длина, время, масса, температура и некоторые другие. Основная идея этих методов — построение приближений сверху и снизу. Напомним процедуру последовательных приближений на примере задачи о взвешивании.

Пример 1. Предположим, что нам нужно взвесить яблоко на чашечных весах, причём каждая гирька, находящаяся в нашем распоряжении, имеет массу 10 граммов.

Сравним яблоко и 10 гирек. Допустим, что яблоко перевесит, значит, его масса больше 100 граммов. В таком случае 100 граммов будут приближением снизу (с недостатком) для неизвестной массы яблока.

Сравним теперь яблоко и 15 гирек. Допустим, что гирьки перевесят, тогда 150 граммов будут приближением сверху (с избытком) для массы яблока.

Найдя приближения сверху и снизу, мы можем гарантировать, что искомая масса заключена между ними. Однако «зазор» между 100 и 150 граммами слишком велик: сюда попадут, например, 102,3 и 149,78 грамма.

Можно уточнить результаты взвешивания, если выполнить ещё один шаг в построении приближений: найти приближение снизу, большее 100 граммов, и приближение сверху, меньшее 150 граммов. Предположим, что на этом шаге 12 гирек оказались легче яблока, а 13 — тяжелее. Тогда масса яблока будет заключена уже в интервале от 120 до 130 граммов.

При увеличении приближения снизу ещё на 10 граммов получится уже приближение сверху. Гирька в 10 граммов чересчур велика, а других, по предположению, у нас нет.

Здесь мы сталкиваемся с типичной для любого измерения трудностью — ограниченными возможностями измерительных приборов.

Если бы мы имели в запасе гирьки массой в 1 грамм, то процесс приближений можно было бы продолжить и обнаружить, что масса яблока принадлежит, например, промежутку от 127 до 128 граммов.

Заметим, что, несмотря на большое количество приближений, точное значение массы не всегда удаётся найти — можно лишь установить границы интервала, в котором находится точное значение.

Всё сказанное остаётся справедливым и при измерении любых других величин: точное значение измеряемой величины принадлежит промежутку на числовой прямой, левым концом которого является приближение снизу, а правым — приближение сверху.

Всякое число, заключённое между приближениями сверху и снизу, может считаться приближённым значением измеряемой величины.

Данное правило не всегда следует понимать буквально. Иногда нужно сделать оговорки, учитывающие природу измеряемых величин. Пусть, например, речь идёт о числе жителей в городе. Допустимые значения такой величины — натуральные числа. Поэтому приближёнными значениями разумно считать только натуральные числа из интервала между приближениями с избытком и недостатком.

Вопрос. Сколько учеников в классе, если их число больше 32 и меньше 35, причём девочек на 3 больше, чем мальчиков?

1.3. Абсолютная погрешность. Пусть a — точное значение некоторой величины, для которого найдены приближения снизу a_1 и сверху a_2.

Обозначим через b какое-нибудь приближённое значение данной величины из промежутка $[a_1; a_2]$. *Погрешностью* этого приближения называется разность $d = a - b$. Зная приближение b и его погрешность d, точное значение можно найти по формуле $a = b + d$.

Точность приближения удобно характеризовать модулем погрешности d. Чем меньше $|d|$, тем точнее данное приближение. Абсолютная величина (модуль) погрешности называется *абсолютной погрешностью.*

Её можно *оценить сверху*, то есть найти число, заведомо превосходящее эту абсолютную погрешность.

Одной из оценок сверху для абсолютной погрешности является число $a_2 - a_1$, равное расстоянию между концами промежутка $[a_1; a_2]$.

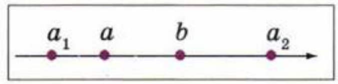


Рис. 1

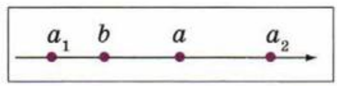


Рис. 2

Предположим, что на числовой прямой числа a, b, a_1 и a_2 расположены как на рис. 1 или как на рис. 2. Вычитая из всех частей двойного неравенства $a_1 \le a \le a_2$ число b, получим двойное неравенство $a_1 - b \le a - b \le a_2 - b$. Поэтому погрешность приближения, то есть разность $d = a - b$, заключена в промежутке $a_1 - b \le d \le a_2 - b$.

Если точка a расположена левее точки b (рис. 1), то расстояние между a и b не превосходит расстояния между a_1 и b, то есть $|d| = |a - b| \le |a_1 - b|$.

Если точка a расположена правее точки b (рис. 2), то расстояние между a и b не превосходит расстояния между a_2 и b, то есть $|d| = |a - b| \le |a_2 - b|$.

В случае $a = b$ абсолютная погрешность $|d|$ равна нулю.

Обозначим через p наибольшее из чисел $|a_1 - b|$ и $|a_2 - b|$. Тогда во всех трёх случаях

$$|d| = |a - b| \le p.$$

Вопрос. Как объяснить, что в примере 1 со взвешиванием яблока абсолютная погрешность всякого приближения из промежутка [127; 128] не больше одного грамма?

1.4.* Выбор оценки абсолютной погрешности. Обычно стараются выбирать приближение b так, чтобы оценка p абсолютной погрешности оказалась наименьшей.

Отметим, что $|a_1 - b|$ и $|a_2 - b|$ в сумме составляют $a_2 - a_1$.

Если приближение b совпадает с серединой $\dfrac{a_2 + a_1}{2}$ отрезка $[a_1; a_2]$, то каждый из отрезков $[a_1; b]$, $[b; a_2]$ равен половине отрезка $[a_1; a_2]$.

Поэтому значение p равняется половине разности $a_2 - a_1$, то есть равняется числу $\frac{a_2 - a_1}{2}$.

Если приближение b отличается от $\frac{a_2 + a_1}{2}$, то оценка абсолютной погрешности больше числа $\frac{a_2 - a_1}{2}$, потому что один из отрезков $[a_1; b]$, $[b; a_2]$ больше половины отрезка $[a_1; a_2]$.

В примере 1 абсолютная погрешность приближённого значения 127,5 из промежутка [127; 128] не больше 0,5 (г).

Вопрос. При измерении отрезка получены приближения: 82 мм — с недостатком и 83 мм — с избытком. Каковы приближённые значения длины отрезка, абсолютная погрешность которых не больше 0,7 мм?

1.5. Точность измерительных приборов. На многих измерительных приборах — весах, термометре, штангенциркуле — вы могли видеть надписи ±1 г, ±0,5° или ±0,1 мм. Такими надписями обозначается точность измерительных приборов. Выясним, как надо правильно понимать эти надписи.

Пусть в результате измерений величины a получено её приближённое значение b. Если известно, что абсолютная погрешность измерения не больше некоторого числа p, то можно гарантировать, что разность между точным и приближённым значениями удовлетворяет неравенству $|a - b| \le p$. Это неравенство для модуля равносильно двойному неравенству $b - p \le a \le b + p$. Таким образом, точное значение a измеряемой величины принадлежит промежутку $[b - p; b + p]$, и это часто записывают так:

$$a = b \pm p.$$

Пример 2. Допустим, что вы измеряете температуру медицинским термометром, точность которого ±0,1°. Если термометр показал 36,6°, то это значит, что ваша настоящая температура равна $36{,}6° \pm 0{,}1°$, то есть значение температуры лежит в промежутке от 36,5° до 36,7°.

Вопрос. Размер детали должен равняться 13 ± 0,25 мм, а при измерении штангенциркулем с точностью ±0,1 мм получилось 12,8 мм. Что следует сделать: принять деталь, забраковать её или измерить ещё раз более точным инструментом?

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется приближением снизу (с недостатком)?
2. Что называется приближением сверху (с избытком)?

3. В чём состоит идея последовательных приближений при измерении величин?

4. Что можно считать приближённым значением измеряемой величины?

5. Что такое абсолютная погрешность приближения?

6. Что называется оценкой абсолютной погрешности приближения?

7. Что можно сказать о точном значении величины, если известно её приближённое значение и оценка сверху абсолютной погрешности?

8.* Как можно выбрать приближение величины, чтобы оценка абсолютной погрешности оказалась наименьшей?

9. Как обозначается точность измерения или измерительного прибора?

Задачи и упражнения

1. Точными или приближёнными являются следующие данные?

а) в школе обучается 378 учеников;

б) в городе проживает 250 тысяч жителей;

в) в сутках 24 часа;

г) поезд был в пути 5 суток;

д) станок состоит из 182 деталей;

е) деталь весит 122 г;

ё) 1 м равен 1000 мм;

ж) диаметр велосипедного колеса равен 630 мм.

2. Найдите какие-нибудь приближения сверху и снизу с точностью до 0,1 для чисел:

а) 9,647; б) 12,784; в) 0,231; г) −1,054; д) −19,672; е) −0,455.

3. Найдите десятичные приближения сверху и снизу с точностью до 0,01 для обыкновенных дробей:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{9}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{6}{11}$; д) $\frac{4}{13}$; е) $\frac{3}{17}$.

4. Определите абсолютную погрешность при замене числа 283 572 приближённым значением:

а) 200 000; б) 300 000; в) 280 000; г) 290 000; д) 283 000;
е) 284 000; ё) 283 500; ж) 283 600; з) 283 570; и) 283 580.

5. Определите абсолютную погрешность при замене дроби 0,8432 приближённым значением:

а) 0,8; б) 0,9; в) 0,84; г) 0,85; д) 0,843; е) 0,844.

6. При взвешивании куска железа получены приближения 7,62 г — с недостатком и 7,8 г — с избытком. Оцените абсолютные погрешности приближений:

а) 7,7 г; б) 7,65 г; в) 7,75 г.

7.* Как надо выбрать приближённое значение массы в предыдущей задаче, чтобы оценка его абсолютной погрешности была наименьшей?

8. Длина карандаша примерно равна 16,3 см, причём абсолютная погрешность измерения не превосходит 5 мм. Может ли точное значение длины равняться:

а) 16,55 см; б) 15,7 см; в) 16,8 см?

9.* Цена деления мензурки равна 2 мл. С какой точностью можно измерять этой мензуркой объёмы жидкостей?

10. Каким промежуткам принадлежат значения величин?

а) 132 ± 3; б) $2,3 \pm 0,15$; в) $-7,45 \pm 0,22$.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое число является одновременно приближением снизу для чисел 2,36 и 2,40?

1) 2,38; 2) 2,36; 3) 2,40; 4) 2,25.

1.2. У больного температура 38,3°; градусник показывает 38,1°. Какова абсолютная погрешность измерения?

1) −0,1; 2) +0,1; 3) −0,2; 4) +0,2.

1.3.* При измерении длины бревна получились приближения снизу 5,25 м и сверху 5,26 м. Какое приближённое значение длины гарантирует наименьшую оценку абсолютной погрешности?

1) 5,24 м; 2) 5,25 м; 3) 5,255 м; 4) 5,256 м.

1.4. Измерение величины a, равной 5, дало значение b, равное 4. Какая из записей верна?

1) $a = 4 \pm 0,3$; 2) $a = 4 \pm 0,6$; 3) $a = 4 \pm 0,9$; 4) $a = 4 \pm 1,2$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Известно, что в каждом килограммовом пакете крупы из магазина находится от 970 до 1010 граммов крупы. Куплено 5 пакетов. Какие величины являются приближением сверху для общего веса купленной крупы?

1) 5000 граммов; 2) 5100 граммов;
3) 5050 граммов; 4) 4850 граммов.

2.2. В магазине килограммовый пакет муки содержит реально от 960 до 1020 граммов муки. Какие из измерений дадут погрешность для количества муки, содержащегося в пакете, в пределах от (−50) до 50 граммов?

1) 960; 2) 990; 3) 1010; 4) 1020.

2.3. Приближённое значение некоторой величины равно 7,4 (1 ± 0,04). Какие из приведённых величин могут быть точным значением этой величины?

1) 7,36; 2) 7,86; 3) 7,56; 4) 7,06.

2.4. При измерении некоторой величины получилось 8,3 с абсолютной погрешностью не более 0,15. Какие из приведённых чисел не могут быть точным значением измеряемой величины?

1) 8,1; 2) 8,3; 3) 8,5; 4) 8,7.

§ 2. ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

2.1. Целая и дробная части положительного числа. Рассмотрим положительное число a, записанное в виде десятичной дроби, например $a = 42{,}4056$. Тогда $a = 42 + 0{,}4056$. В этой записи число 42 называют целой частью числа a, число 0,4056 называют дробной частью числа a.

Заметим, что выполняется соотношение

$$42 \le a < 42 + 1 = 43, \tag{1}$$

то есть целая часть числа a является наибольшим целым числом, не превосходящим числа a.

Если из всех частей соотношения (1) вычесть число 42, то получим соотношение

$$0 \le a - 42 < 1, \tag{2}$$

то есть дробная часть числа a, равная $a - 42$, где $a - 42 = 0{,}4056$, является неотрицательным числом, меньшим 1.

Вопрос. Чему равна целая часть числа 0,999999?

2.2. Десятичные приближения положительного числа с точностью до 1.

Пример 1. Возьмём положительную десятичную дробь, которая не является целым числом, например $a = 42{,}4056$. Из соотношения (1) следует двойное неравенство $42 < a < 43$. Таким образом, число 42 является приближением снизу, а число 43 — приближением сверху числа a, и абсолютная погрешность каждого из этих приближений меньше 1, то есть $|a - 42| < 1$ и $|a - 43| < 1$.

Для числа a, равного 42,4056:

число 42 называется *десятичным приближением снизу* числа a с точностью до 1;

число 43 называется *десятичным приближением сверху* числа a с точностью до 1.

Другими словами, число 42 получено из числа a отбрасыванием стоящих после запятой всех знаков дробной части.

В этом примере десятичное приближение снизу числа a с точностью до 1 является целой частью этого числа a; десятичное приближение сверху числа a с точностью до 1 на единицу больше целой части числа a.

Аналогично для любого положительного числа b, не являющегося целым, определяются десятичное приближение снизу с точностью до 1 и десятичное приближение сверху с точностью до 1, причём десятичное приближение снизу числа b с точностью до 1 является целой частью этого числа b; десятичное приближение сверху числа b с точностью до 1 на единицу больше целой части числа b.

Дополнительно в случае, когда d является целым положительным числом, его целая часть, равная самому числу d, называется *десятичным приближением снизу* с точностью до 1; число $d + 1$ называется *десятичным приближением сверху* с точностью до 1.

Вопрос. Чему равно десятичное приближение снизу для числа 0,999 с точностью до 1?

2.3. Десятичные приближения положительного числа с заданным числом знаков после запятой.

Пример 2. Возьмём десятичную дробь $a = 42{,}4056$. Рассмотрим число $100a$, равное 4240,56. Для него десятичным приближением снизу с точностью до 1 является число 4240, десятичным приближением сверху с точностью до 1 является число 4241. При этом выполняются неравенства

$$4240 < 100a < 4241,\ |100a - 4240| < 1 \text{ и } |100a - 4241| < 1.$$

Разделив каждую из частей этих неравенств на 100 получим:

$$42{,}40 < a < 42{,}41,$$
$$|a - 42{,}40| < 0{,}01,$$
$$|a - 42{,}41| < 0{,}01.$$

Таким образом, число 42,40 является приближением снизу, а число 42,41 — приближением сверху числа a, и абсолютная погрешность каждого из этих приближений меньше 0,01.

Для числа a, равного 42,4056:

число 42,40 называется *десятичным приближением снизу* числа a с точностью до 0,01;

число 42,41 называется *десятичным приближением сверху* числа a с точностью до 0,01.

Другими словами, десятичное приближение 42,40 числа a, равного 42,4056, получено отбрасыванием всех десятичных знаков числа a, стоящих правее второго знака после запятой; десятичное приближение 42,41 получено прибавлением числа 0,01 к десятичному приближению 42,40.

Для любого положительного числа b, для которого число $100b$ не является целым, то есть среди десятичных знаков числа b, стоящих правее второго знака после запятой, есть хотя бы один ненулевой знак, аналогично определяются десятичное приближение снизу с точностью до 0,01 и десятичное приближение сверху с точностью до 0,01, причём десятичное приближение снизу числа b с точностью до 0,01 меньше числа b; десятичное приближение сверху числа b с точностью до 0,01 больше числа b.

В случае, когда $100d$ является целым положительным числом, само число d называют десятичным приближением снизу числа d с точностью до 0,01; число $d + 0{,}01$ называется десятичным приближением сверху с точностью до 0,01.

Пример 3. Для числа 2,01 его десятичным приближением снизу с точностью до 0,01 является число 2,01; его десятичным приближением сверху с точностью до 0,01 является число 2,02.

Аналогично для любого положительного числа определяются десятичные приближения сверху и снизу с точностью до 0,1; до 0,001, до 0,000001 и других дробных разрядных единиц.

Вопрос. Чему равно десятичное приближение снизу для числа 371,240001 с точностью до 10^{-3}?

2.4. Десятичные приближения положительного числа с точностью до целой разрядной единицы.

Пример 4. Возьмём число $a = 31\ 415{,}9$ и рассмотрим число $10^{-4} \cdot a$, равное 3,14159. Для него десятичным приближением снизу с точностью до 1 является число 3, десятичным приближением сверху с точностью до 1 является число 4. При этом выполняются неравенства

$$3 < 10^{-4} \cdot a < 4, \quad |10^{-4} \cdot a - 3| < 1 \ \text{ и } \ |10^{-4} \cdot a - 4| < 1.$$

Умножив каждую из частей этих неравенств на 10^4 получим:

$$30\ 000 < a < 40\ 000,$$
$$|a - 30\ 000| < 10\ 000 = 10^4,$$
$$|a - 40\ 000| < 10\ 000 = 10^4.$$

Таким образом, число 30 000 является приближением снизу, а число 40 000 — приближением сверху числа 31 415,9, и абсолютная погрешность каждого из этих приближений меньше $10\,000 = 10^4$.

Для числа a, равного 31 415,9:

число 30 000 называется *десятичным приближением снизу* числа a с точностью до 10^4;

число 40 000 называется *десятичным приближением сверху* числа a с точностью до 10^4.

Другими словами, десятичное приближение 30 000 числа a, равного 31415,9, получено отбрасыванием всех десятичных знаков числа a, стоящих после запятой, и заменой на нули четырёх знаков непосредственно перед запятой; десятичное приближение 40 000 получено прибавлением числа 10 000, равного 10^4, к десятичному приближению 30 000.

Для любого положительного числа b, для которого число $10^{-4} \cdot b$ не является целым, аналогично определяются десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 10^4, причём десятичное приближение снизу числа b с точностью до 10^4 меньше числа b; десятичное приближение сверху числа b с точностью до 10^4 больше числа b.

В случае, когда $10^{-4} \cdot d$ является целым положительным числом, само число d называют *десятичным приближением снизу* числа d с точностью до 10^4; число $d + 10^4$ называется *десятичным приближением сверху* с точностью до 10^4.

Пример 5. Для числа 2 000 000 его десятичным приближением снизу с точностью до 10^4 является число 2 000 000; его десятичным приближением сверху с точностью до 10^4 является число 2 010 000.

Аналогично для любого положительного числа определяются десятичные приближения сверху и снизу с точностью до 10; до 100, до 10^6 и других целых разрядных единиц.

Вопрос. Чему равно десятичное приближение сверху для числа 391,240001 с точностью до 10^3?

2.5.* Десятичные приближения положительного числа. Рассмотрим теперь общее понятие десятичных приближений положительного числа a.

Пусть m — целое число.

Десятичным приближением снизу числа a с точностью до 10^m называется число, равное $b \cdot 10^m$, где b — целая часть числа $a \cdot 10^{-m}$.

Десятичным приближением сверху числа a с точностью до 10^m называется число, равное $(b + 1) \cdot 10^m$, где b — целая часть числа $a \cdot 10^{-m}$.

Для этих десятичных приближений числа a выполняется двойное неравенство

$$b \cdot 10^m \le a < b \cdot 10^m + 10^m.$$

Заметим, что $m = 0$, $b = 42$ в примере 1; $m = -2$, $b = 4240$ в примере 2; $m = 4$, $b = 3$ в примере 4.

Вопрос. Чему равна целая часть числа $10^3 \cdot 2{,}71828$?

2.6. Примеры десятичных приближений отрицательных чисел.

Пример 6. Возьмём десятичную дробь $a = -42{,}4056$. В примере 1 для числа 42,4056 были найдены десятичное приближение 42 снизу и десятичное приближение 43 сверху с точностью до 1, для которых выполняется двойное неравенство:

$$42 < 42{,}4056 < 43.$$

Умножив все части этого неравенства на число -1, получим

$$-43 < -42{,}4056 < -42.$$

Заметим, что

$$|a - (-43)| < 1 \quad \text{и} \quad |a - (-42)| < 1.$$

Будем считать:

число -43 десятичным приближением снизу для отрицательного числа a, равного $-42{,}4056$, с точностью до 1;

число -42 десятичным приближением сверху для данного отрицательного числа a с точностью до 1.

Пример 7. Снова возьмём десятичную дробь $a = -42{,}4056$. В примере 2 для числа 42,4056 были определены десятичное приближение 42,40 снизу с точностью до 0,01 и десятичное приближение 42,41 сверху с точностью до 0,01, для которых выполняется двойное неравенство:

$$42{,}40 < 42{,}4056 < 42{,}41.$$

Умножив все части этого неравенства на число -1, получим

$$-42{,}41 < -42{,}4056 < -42{,}40.$$

Заметим, что

$$|a - (-42{,}41)| < 0{,}01 \quad \text{и} \quad |a - (-42{,}40)| < 0{,}01.$$

Будем считать:

число $-42{,}41$ десятичным приближением снизу для отрицательного числа a, равного $-42{,}4056$, с точностью до 0,01;

число $-42{,}40$ десятичным приближением сверху для данного отрицательного числа a с точностью до 0,01.

Пример 8. Возьмём десятичную дробь $a = -31\,415{,}9$. В примере 4 для числа 31 415,9 были найдены десятичное приближение 30 000 снизу и десятичное приближение 40 000 сверху с точностью до 10 000, для которых выполняется двойное неравенство:

$$30\,000 < 31\,415{,}9 < 40\,000.$$

Умножив все части этого неравенства на число -1, получим

$$-40\,000 < -31\,415{,}9 < -30\,000.$$

Заметим, что

$$|a - (-40\,000)| < 10\,000 \quad \text{и} \quad |a - (-30\,000)| < 10\,000.$$

Будем считать:

число $-40\,000$ десятичным приближением снизу для отрицательного числа a, равного $-31\,415{,}9$, с точностью до 10 000,

число $-30\,000$ десятичным приближением сверху для данного отрицательного числа a с точностью до 10 000.

Вопрос. Может ли число 0 быть десятичным приближением с некоторой точностью для отрицательного числа?

2.7. Десятичные приближения отрицательного числа. По аналогии с рассмотренными примерами 6—8 сформулируем общее определение десятичных приближений отрицательного числа.

Пусть число $-b$ отрицательно, m — фиксированное целое число. Тогда для положительного числа b определено его десятичное приближение d снизу с точностью до 10^m. Число $-d$ мы будем называть десятичным приближением сверху с точностью до 10^m отрицательного числа $-b$.

Для положительного числа b определено также его десятичное приближение h сверху с точностью до 10^m. Число $-h$ мы будем называть десятичным приближением сверху с точностью до 10^m отрицательного числа $-b$.

Вопрос. Какое из десятичных приближений отрицательного числа — сверху или снизу — может совпасть с этим числом?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Что называется целой частью положительного числа?

2. Как вы понимаете слова «дробная часть положительного числа»?

3. Что называется десятичным приближением положительного числа снизу с точностью до 1?

4. Что называется десятичным приближением положительного числа сверху с точностью до 1?

5. Что называется десятичным приближением положительного числа снизу с точностью до 0,01?

6. Что называется десятичным приближением положительного числа сверху с точностью до 0,01?

7. Что называется десятичным приближением положительного числа снизу с точностью до 10^4?

8. Что называется десятичным приближением положительного числа сверху с точностью до 10^4?

9.* Что называется десятичным приближением положительного числа снизу (сверху) с точностью до 10^{-m}, где m — натуральное число?

10.* Что называется десятичным приближением снизу (сверху) с точностью до 10^m для положительного числа, где m — натуральное число?

11. Как находятся десятичные приближения снизу (сверху) с данной точностью для отрицательного числа?

Задачи и упражнения

1. Найдите целую часть суммы:

а) $12{,}3875 + 24{,}8696$; б) $35{,}4178 + 49{,}291$;
в) $0{,}553329 + 551{,}9999$; г) $66610{,}1234 + 79{,}8766$.

2. Найдите дробную часть суммы:

а) $2{,}3875 + 4{,}8696$; б) $5{,}4178 + 9{,}291$;
в) $0{,}3329 + 1{,}9999$; г) $10{,}1234 + 0{,}8766$.

3. Найдите десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 10^{-3} для суммы:

а) $2{,}3875 + 4{,}8696$; б) $5{,}4178 + 9{,}291$;
в) $0{,}3329 + 1{,}9999$; г) $10{,}1234 + 0{,}8766$.

4. Найдите десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 10^{-1} для суммы:

а) $2{,}31875 + 4{,}82696$; б) $5{,}43178 + 9{,}2491$;
в) $0{,}35329 + 1{,}96999$; г) $10{,}17234 + 0{,}88766$.

5. Найдите целую часть произведения:

а) $13{,}8 \cdot 4{,}6$; б) $24{,}3 \cdot 7{,}8$; в) $32{,}3 \cdot 7{,}7$; г) $46{,}3 \cdot 4{,}9$.

6. Найдите дробную часть произведения:

а) $3{,}8 \cdot 14{,}6$; б) $4{,}3 \cdot 27{,}8$; в) $2{,}3 \cdot 37{,}7$; г) $6{,}3 \cdot 44{,}9$.

7. Найдите десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 10^{-1} для произведения:

а) $3{,}8 \cdot 4{,}6$; б) $4{,}3 \cdot 7{,}8$; в) $2{,}3 \cdot 7{,}7$; г) $6{,}3 \cdot 4{,}9$.

8. Найдите десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 10^{-3}для разности:

а) $8{,}4721 - 13{,}8912$; б) $4{,}1283 - 6{,}592$.

9.* Найдите десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 10^{-4} для числа:

а) $\frac{2}{9} - \frac{5}{11}$; б) $4{,}1 - \frac{22}{9}$.

10. Найдите десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 100 для произведения:

а) $21{,}3 \cdot 34{,}6$; б) $(-52{,}7) \cdot 11{,}9$;

в) $30{,}4 \cdot (-17{,}7)$; г) $(-21{,}6) \cdot (-42{,}3)$.

11.* Найдите десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 10^2для числа $3333{,}3 + 333{,}33 + 33{,}333 + 3{,}3333 + 0{,}33333$.

12.* Может ли для некоторого числа:

а) какое-нибудь его десятичное приближение снизу не являться его приближением сверху;

б) какое-нибудь его десятичное приближение сверху не являться его приближением сверху?

Приведите примеры.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равна целая часть произведения $3{,}33 \cdot 3{,}34$?

1) 9; 2) 10; 3) 11; 4) 12.

1.2. Чему равна дробная часть произведения $3{,}3 \cdot 3{,}4$?

1) 0,12; 2) 0,18; 3) 0,22; 4) 0,32.

1.3. Чему равно приближение сверху для $\frac{1}{3}$ с точностью до одной десятой?

1) 0,5; 2) 0,4; 3) 0,3; 4) 0,2.

1.4. Чему равно десятичное приближение снизу для $\frac{1}{15}$ с точностью до второго разряда после запятой?

1) 0,066; 2) 0,06; 3) 0,067; 4) 0,07.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из следующих десятичных дробей являются приближениями сверху для соответствующих обыкновенных дробей?

1) 0,16 для $\frac{1}{6}$; 2) 0,22 для $\frac{2}{9}$;

3) 2,3 для $\frac{20}{9}$; 4) $-0{,}22$ для $-\frac{2}{9}$?

2.2.* Целые части каких из следующих чисел являются приближениями сверху для соответствующих обыкновенных дробей?

1) $52{,}16$ для $\frac{317}{6}$; 2) $25{,}03$ для $\frac{222}{9}$;

3) $89{,}30$ для $\frac{620}{7}$; 4) $90{,}22$ для $\frac{999}{11}$.

2.3.* Дробные части каких из следующих чисел являются десятичными приближениями снизу до третьего знака после запятой соответствующих обыкновенных дробей?

1) $52{,}833$ для $\frac{317}{6}$; 2) $24{,}666$ для $\frac{222}{9}$;

3) $150{,}166$ для $\frac{1}{6}$; 4) $23{,}666$ для $\frac{2}{3}$.

2.4.* В каких случаях указанное натуральное число является десятичным приближением сверху для соответствующего второго числа?

1) 100 для 3; 2) 1000 для 1222,8;

3) 106 для 105; 4) 206 для 205,1.

§ 3. ОКРУГЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

3.1. Округление положительного числа до второго разряда после запятой. Будем называть *округлением* числа замену его на одно из десятичных приближений. Существуют различные способы округления. Рассмотрим один из распространённых способов округления.

Пример 1. Возьмём число $a = 5{,}29459$. Для числа a рассмотрим десятичное приближение снизу $a_1 = 5{,}29$ с точностью до 0,01 и десятичное приближение сверху $a_2 = 5{,}30$ с точностью до 0,01, а также полусумму этих приближений $b = \dfrac{a_1 + a_2}{2} = 5{,}295$.

Изобразим точки a_1, b и a_2 на числовой прямой. Заметим, что точка b является серединой промежутка $[a_1; a_2]$.

В записи числа a цифра третьего разряда после запятой меньше 5, поэтому $a < b$ и число a оказывается в промежутке $[a_1; b)$, как на рис. 1.

В этом случае выбираем десятичное приближение снизу, равное 5,29, и называем его *результатом округления* числа a до второго разряда после запятой.

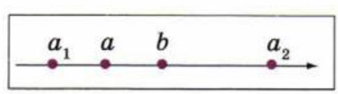


Рис. 1

Аналогично, если в записи положительного числа d цифра третьего разряда после запятой меньше 5, то результатом округления этого числа d до второго разряда после запятой будем называть его десятичное приближение снизу с точностью до 0,01, то есть с точностью до второго разряда после запятой.

Пример 2. Рассмотрим число $a = 5{,}29817$, которое имеет те же самые десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 0,01 и ту же полусумму этих приближений, что и в примере 1.

Однако в этом случае в записи числа a цифра третьего разряда после запятой больше 5, поэтому $a > b$ и число a лежит в промежутке $[b;\ a_2]$, как на рис. 2.

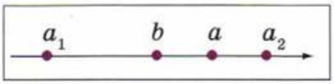


Рис. 2

В этом случае выбираем десятичное приближение сверху, равное 5,30, и называем его *результатом округления* числа a до второго разряда после запятой.

Аналогично, если в записи положительного числа d цифра третьего разряда после запятой больше 5, то результатом округления этого числа d до второго разряда после запятой будем называть его десятичное приближение сверху с точностью до 0,01, то есть с точностью до второго разряда после запятой.

Пример 3. Рассмотрим число $a = 5{,}295$, которое имеет те же самые десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 0,01 и ту же полусумму этих приближений, что и в примерах 1 и 2.

Однако в этом случае в записи числа a цифра третьего разряда после запятой равна 5, поэтому $a = b$, но число a так же, как и в примере 2, попало в промежуток $[b;\ a_2]$.

В этом случае выбираем десятичное приближение сверху, равное 5,30, и называем его *результатом округления* числа a до второго разряда после запятой.

Аналогично, если в записи положительного числа d цифра третьего разряда после запятой равна 5, то результатом округления этого числа d до второго разряда после запятой будем называть его десятичное приближение сверху с точностью до 0,01, то есть с точностью до второго разряда после запятой.

Вопрос. Чему равен результат округления числа 3,87512 до второго разряда после запятой?

3.2. Округление положительного числа до других разрядов после запятой. В примерах 1 и 2 в качестве результата округления числа было взято то десятичное приближение до второго разряда после запятой, которое расположено «ближе» к заданному числу.

Заметим, что в каждом из трёх рассмотренных случаев (примеры 1—3) абсолютная погрешность результата округления положительного числа до второго разряда после запятой не превосходит числа 0,005, то есть половины от 0,01 — второй разрядной единицы после запятой.

Аналогично определяются округления положительного числа до первого разряда после запятой, до третьего разряда после запятой, до шестого разряда после запятой и так далее.

При этом абсолютная погрешность результата округления положительного числа до n-го разряда после запятой не превосходит половины той же разрядной единицы.

Вопрос. Чему равен результат округления числа 3,1415926 до четвёртого разряда после запятой?

3.3.* Правило округления положительного числа до некоторого разряда после запятой.

Сформулируем общее правило округления положительного числа до некоторого разряда после запятой.

Пусть m — натуральное число.

Если цифра $(m+1)$-го разряда после запятой в записи положительного числа a меньше 5, то результатом округления числа a до m-го разряда после запятой является десятичное приближение снизу с точностью до 10^{-m};

если цифра $(m+1)$-го разряда после запятой в записи положительного числа a больше либо равна 5, то результатом округления числа a до m-го разряда после запятой является десятичное приближение сверху с точностью до 10^{-m}.

При округлении по данному правилу абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа $0{,}5 \cdot 10^{-m}$.

Вопрос. Чему равен результат округления числа 9,99999 до третьего разряда после запятой?

3.4. Округление положительного числа до разряда единиц.

Пример 4. Округлим число 120275,7 до разряда единиц. Для этого возьмём десятичное приближение 120275 снизу с точностью до 1, десятичное приближение 120276 сверху с точностью до 1 и полусумму 120275,5 этих десятичных приближений. Для числа 120275,7 выполняется двойное неравенство $120275{,}5 < 120275{,}7 < 120276$, поэтому число 120275,7 находится в промежутке [120275,5; 120 276].

Будем считать десятичное приближение 120 276 результатом округления числа 120275,7 до разряда единиц.

Пример 5. Округлим число 120 275 до разряда единиц. Для этого возьмём десятичное приближение 120 275 снизу с точностью до 1, десятичное приближение 120 276 сверху с точностью до 1 и полусумму 120275,5 этих десятичных приближений. Для числа 120 275 выполняется двойное неравенство $120\,275 \le 120\,275 < 120275{,}5$, поэтому число 120 275 находится в промежутке $[120\,275;\ 120275{,}5)$.

Будем считать результатом округления числа 120 275 до разряда единиц десятичное приближение 120 275, равное в данном примере самому числу.

Пример 6. Округлим число 0,47 до разряда единиц. Для этого возьмём десятичное приближение 0 снизу с точностью до 1, десятичное приближение 1 сверху с точностью до 1 и полусумму 0,5 этих десятичных приближений. Для числа 0,47 выполняется двойное неравенство $0 < 0{,}47 < 0{,}5$, поэтому число 0,47 находится в промежутке $[0;\ 0{,}5)$.

Будем считать десятичное приближение 0 результатом округления числа 0,47 до разряда единиц.

Пример 7. Округлим число 0,517 до разряда единиц. Для этого возьмём десятичное приближение 0 снизу с точностью до 1, десятичное приближение 1 сверху с точностью до 1 и полусумму 0,5 этих десятичных приближений. Для числа 0,517 выполняется двойное неравенство $0{,}5 < 0{,}517 < 1$, поэтому число 0,517 находится в промежутке $[0{,}5;\ 1]$.

Будем считать десятичное приближение 1 результатом округления числа 0,517 до разряда единиц.

Сформулируем правило округления положительного числа до разряда единиц.

Если цифра 1-го разряда после запятой в записи положительного числа *a* меньше 5, то результатом округления числа *a* до разряда единиц является десятичное приближение снизу с точностью до 1;

если цифра 1-го разряда после запятой в записи положительного числа *a* больше либо равна 5, то результатом округления числа *a* до разряда единиц является десятичное приближение сверху с точностью до 1.

При округлении по данному правилу абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа 0,5.

Вопрос. Чему равен результат округления числа 120275,4999 до разряда единиц?

3.5. Округление положительного числа до разряда десятков.

Пример 8. Округлим число 120275,7 до разряда десятков. Для этого возьмём десятичное приближение 120 270 снизу с точностью до 10, десятичное приближение 120 280 сверху с точностью до 10 и полусумму 120 275 этих десятичных приближений. Для числа 120275,7 выполняется двойное неравенство $120\,275 < 120275{,}7 < 120\,280$, поэтому число 120275,7 находится в промежутке [120 275; 120 280].

Будем считать десятичное приближение 120 280 результатом округления числа 120275,7 до разряда десятков.

Сформулируем правило округления положительного числа до разряда десятков.

Если цифра разряда единиц в записи положительного числа *a* меньше 5, то результатом округления числа *a* до разряда десятков является десятичное приближение снизу с точностью до 10;

если цифра разряда единиц в записи положительного числа *a* больше либо равна 5, то результатом округления числа *a* до разряда десятков является десятичное приближение сверху с точностью до 10.

При округлении по данному правилу абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа 5.

Аналогично определяются округления положительного числа до разряда сотен, тысяч, десятков тысяч, миллионов, миллиардов и так далее.

Вопрос. Чему равен результат округления числа 204,2013 до разряда десятков?

3.6.* Правило округления положительного числа до разряда 10^m. Сформулируем правило округления положительного числа до разряда 10^m, где m — натуральное число.

Если цифра разряда 10^{m-1} в записи положительного числа *a* меньше 5, то результатом округления числа *a* до разряда 10^m является десятичное приближение снизу с точностью до 10^m;

если цифра разряда 10^{m-1} в записи положительного числа *a* больше либо равна 5, то результатом округления числа *a* до разряда 10^m является десятичное приближение сверху с точностью до 10^m.

При округлении по данному правилу абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа $0{,}5 \cdot 10^m$, то есть не превосходит половины разрядной единицы 10^m.

Вопрос. Чему равны результаты округления числа 2013,2013 до разряда сотен и до разряда тысяч?

3.7. Примеры округления отрицательных чисел. Из рассмотрения примера 1 следует, что результатом округления числа 5,29459 до второго разряда после запятой является число 5,29. Положим, что результатом округления отрицательного числа −5,29459 до второго разряда после запятой является число $-5{,}29$. В этом случае абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа $0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

Из рассмотрения примера 2 следует, что результатом округления числа 5,29817 до второго разряда после запятой является число 5,30. Положим, что результатом округления отрицательного числа $-5{,}29817$ до второго разряда после запятой является число $-5{,}30$. В этом случае абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа $0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

Из рассмотрения примера 3 следует, что результатом округления числа 5,295 до второго разряда после запятой является число 5,30. Положим, что результатом округления отрицательного числа $-5{,}295$ до второго разряда после запятой является число $-5{,}30$. В этом случае абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа $0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

Аналогично определяются округления отрицательного числа до любого разряда после запятой.

В примере 4 было определено, что результатом округления числа 120275,7 до разряда единиц является число 120 276. Положим, что результатом округления отрицательного числа $-120275{,}7$ до разряда единиц является число $-120\ 276$. В этом случае абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа 0,5.

В примере 5 было определено, что результатом округления числа 120 275 до разряда единиц является число 120 275. Положим, что результатом округления отрицательного числа $-120\ 275$ до разряда единиц является число $-120\ 275$. В этом случае абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа 0,5.

В примере 6 было определено, что результатом округления числа 0,47 до разряда единиц является число 0. Положим, что результатом округления отрицательного числа $-0{,}47$ до разряда единиц является число 0. В этом случае абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа 0,5.

В примере 7 было определено, что результатом округления числа 0,517 до разряда единиц является число 1. Положим, что результатом округления отрицательного числа $-0{,}517$ до разряда единиц является число -1. В этом случае абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа 0,5.

В примере 8 было определено, что результатом округления числа 120275,7 до разряда десятков является число 120 280. Положим, что результатом округления отрицательного числа $-120275{,}7$ до разряда десятков является число $-120\,280$. В этом случае абсолютная погрешность результата округления не превосходит числа $0{,}5 \cdot 10$.

Аналогично определяются округления отрицательного числа до разряда сотен, тысяч, десятков тысяч, миллионов, миллиардов и так далее.

Вопрос. Чему равен результат округления числа $-5{,}298176$ до второго разряда после запятой?

3.8.* Указание разрядов округления при помощи степеней числа 10.

Пример 9. Рассмотрим число 2013,2013. При округлении этого числа до разряда сотен получим 2000. При округлении того же самого числа 2013,2013 до разряда тысяч опять-таки получим число 2000.

Мы видим, что только по результату округления не всегда можно определить, до какого разряда произведено округление и какова погрешность округления.

В случае округления до разряда 10^2 можно представить данное число 2013,2013 в виде $20{,}132013 \cdot 10^2$. Поскольку результатом округления числа 20,132013 до разряда единиц является число 20, то результат округления исходного числа до разряда 10^2 можно записать в виде $20 \cdot 10^2$.

В случае же округления до разряда 10^3 можно представить данное число 2013,2013 в виде $2{,}0132013 \cdot 10^3$. Результатом округления числа 2,0132013 до разряда единиц является число 2, поэтому результат округления исходного числа до разряда 10^3 можно записать в виде $2 \cdot 10^3$.

Аналогично можно записывать и другие результаты округления.

Пример 10. Запишем результат округления числа 15,293 до второго знака после запятой, то есть до разряда 10^{-2}.

Заметим, что $15{,}293 = 1529{,}3 \cdot 10^{-2}$. Округляя число 1529,3 до разряда единиц, получим 1529. Поэтому результат исходного числа до разряда 10^{-2} равен числу $1529 \cdot 10^{-2}$.

Вопрос. Как с помощью степени числа 10 записать результат округления числа 10,01 до разряда единиц?

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило округления положительного числа до второго разряда после запятой.

2. Как оценивается абсолютная погрешность округления до второго разряда после запятой?

3.* Сформулируйте правило округления положительного числа до m-го разряда после запятой.

4.* Как оценивается абсолютная погрешность округления до m-го разряда после запятой?

5. Сформулируйте правило округления положительного числа до разряда единиц.

6. Как оценивается абсолютная погрешность округления до разряда единиц?

7. Сформулируйте правило округления положительного числа до разряда десятков.

8.* Сформулируйте правило округления положительного числа до разряда 10^m, где m — натуральное число.

9.* Как оценивается абсолютная погрешность округления до разряда 10^m, где m — натуральное число?

10. Сформулируйте правило округления отрицательного числа.

11.* Как указывается разряд округления при помощи степеней числа 10?

Задачи и упражнения

1. Округлите следующие числа до разряда десятков:

а) 503; б) 817; в) 4 305; г) 21 658;
д) 12 814; е) 17 715.

2. Округлите следующие числа до разряда тысяч:

а) 32 385; б) 11 721; в) 100 849; г) 245 604;
д) 269 724; е) 19 634.

3. Округлите следующие числа до разряда единиц:

а) 0,91; б) 0,18; в) 0,50; г) 0,098;
д) 2,83; е) 12,45; ё) 10,54; ж) −25,49;
з) −0,398; и) −0,7398; й) −9,658; к) −10,5.

4. Округлите следующие числа до разряда десятых:

а) 5,913; б) 2,486; в) −1,508; г) 5,29;
д) 4,028; е) −1,97; ё) 3,2525.

5. Округлите следующие числа до разряда сотых:

а) 3,417; б) 15,284; в) −0,321; г) −1,0049;
д) −2,195; е) −10,007; ё) 0,1667.

6.* Укажите с помощью степеней числа 10 результат округления числа 25782,15:

а) до разряда единиц; б) до разряда тысяч; в) до разряда десятых.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен результат округления числа 987 654,321 до разрядной единицы 10^2?

1) 988 000; 2) 987 000; 3) 987 600; 4) 987 700.

1.2. Как записывается результат округления числа 37065,91 до разряда тысяч с помощью степени числа 10?

1) $37 \cdot 10^3$; 2) $38 \cdot 10^3$; 3) $370 \cdot 10^2$; 4) $371 \cdot 10^2$.

1.3. Что является результатом округления числа 1,168 до второго знака после запятой?

1) 1,168; 2) 1,17; 3) 1,170; 4) 1,16.

1.4. Какова абсолютная погрешность округления числа 2112,2 до десятков?

1) 0,2; 2) 2,0; 3) 2,2; 4) 12,2.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Для каких из указанных чисел результатом округления до третьего разряда после запятой будет число 23,456?

1) 23,45531; 2) 23,45537; 3) 23,45647; 4) 23,45653.

2.2. Для каких из указанных чисел результатом округления до третьего разряда после запятой будет число −0,047?

1) −0,04692; 2) −0,04643; 3) −0,04709; 4) −0,04767.

2.3. Какие из следующих чисел являются результатом округления числа 11,168 до некоторого разряда?

1) 11,16; 2) 10; 3) 11,20; 4) 11,2.

2.4. Какие из следующих округлений имеют абсолютную погрешность, большую 0,15?

1) округление 715,11 до 715; 2) округление 816,68 до 816,7;
3) округление 816,681 до 816,68; 4) округление 815,32 до 820.

§ 4. ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЁННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

4.1. Как возникают високосные годы. Сколько же дней в году? В обычном году 365 дней. Но каждый четвёртый год — високосный — содержит 366 дней! Спрашивается, почему годы разные? Ведь год — это время, за которое Земля совершает полный оборот вокруг Солнца.

Сутки — это время обращения Земли вокруг своей оси.

Все эти странности календаря имеют чисто математическую природу и напрямую связаны с ошибками округления. На самом деле продолжительность года не равна ни 365, ни 366 дням. Уже в далёкой древности выяснилось, что это число — нецелое. Оно примерно равняется 365,25.

Из соображений практического удобства число суток в году округляют до 365. Через год ошибка составит 0,25 суток, через два — 0,5 суток, через три — 0,75 суток, а через четыре «набегают» уже целые сутки.

Чтобы исправить возникающую неточность, раз в четыре года к самому короткому месяцу — февралю — добавляют дополнительный день. Так возникают високосные годы. По традиции високосными считаются годы, номера которых делятся на четыре. Слово «високосный» является искажением латинского выражения, означающего «дважды шестой». Древние римляне помещали лишний день не в конце февраля, а перед шестым днём до начала марта, то есть до мартовских *календ*. Отсюда, кстати, произошло и слово календарь.

Продолжительность года, равная 365,25, также приближённая. Более точными измерениями установлено, что продолжительность года составляет 365 суток 5 часов 48 минут и 46 секунд. Поэтому введение високосных лет не может полностью исправить погрешности летоисчисления. Но теперь они становятся очень маленькими, и необходимость корректировки календаря возникает реже чем раз в столетие.

Вопрос. Через сколько лет (с учётом високосных) погрешность календаря превзойдёт одни сутки?

4.2. Сложение приближённых значений. Проблема с числом дней в году показывает, что при сложении приближённых величин погрешности могут возрастать и иногда достигают больших значений. Поэтому важно уметь заранее оценить погрешность суммы, если известны погрешности отдельных слагаемых.

Пусть a_1 и a_2 — точные, а b_1 и b_2 — приближённые значения некоторых величин. Допустим, что абсолютные погрешности $|a_1 - b_1|$ и $|a_2 - b_2|$ этих приближений не превосходят p_1 и p_2 соответственно. Тогда справедливы неравенства

$$-p_1 \le a_1 - b_1 \le p_1,$$

$$-p_2 \le a_2 - b_2 \le p_2.$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем

$$-(p_1 + p_2) \le (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \le p_1 + p_2.$$

Следовательно,

$$|(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)| \le p_1 + p_2,$$

поэтому $b_1 + b_2$ является приближённым значением суммы $a_1 + a_2$, погрешность которого не превосходит $p_1 + p_2$. Таким образом, выполняется правило:

Абсолютная погрешность суммы приближённых значений не превосходит суммы абсолютных погрешностей каждого слагаемого.

Это правило распространяется на суммы трёх, четырёх или любого другого числа слагаемых.

Пример 1. Найдём сумму чисел $a_1 = 12{,}6 \pm 0{,}05$, $a_2 = 4{,}81 \pm 0{,}03$, $a_3 = 7{,}14 \pm 0{,}06$ и оценим абсолютную погрешность результата.

Запись $a_1 = 12{,}6 \pm 0{,}05$ означает, что точное значение a_1 неизвестно, однако число $b_1 = 12{,}6$ приближает его с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,05.Точно так же числа $b_2 = 4{,}81$ и $b_3 = 7{,}14$ приближают a_2 и a_3 с абсолютными погрешностями, не большими 0,03 и 0,06 соответственно.

По правилу сложения приближений определяем, что число

$$b_1 + b_2 + b_3 = 12{,}6 + 4{,}81 + 7{,}14 = 24{,}55$$

является приближённым значением суммы $a_1 + a_2 + a_3$, причём абсолютная погрешность этого приближения не больше $0{,}05 + 0{,}03 + 0{,}06 = 0{,}14$. Значит,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 24{,}55 \pm 0{,}14.$$

Вопрос. Может ли абсолютная погрешность суммы оказаться меньше абсолютных погрешностей отдельных слагаемых?

4.3. Погрешность разности. Оценим абсолютную погрешность разности приближённых значений. Пусть снова b_1 и b_2 — приближения величин a_1 и a_2, абсолютные погрешности которых не превосходят p_1 и p_2. Подобно тому, как было ранее, имеем

$$-p_1 \le a_1 - b_1 \le p_1,$$
$$-p_2 \le b_2 - a_2 \le p_2.$$

Складывая почленно неравенства, получаем:

$$-(p_1 + p_2) \le (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) \le p_1 + p_2,$$

следовательно,

$$|(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)| \le p_1 + p_2.$$

Итак, $b_1 - b_2$ является приближённым значением разности $a_1 - a_2$, причём погрешность этого приближения не превосходит $p_1 + p_2$. Получилось правило:

Абсолютная погрешность разности приближённых значений не превосходит суммы абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

Вопрос. Можно ли утверждать, что $a_1 < a_2$, если $a_1 = 2{,}05 \pm 0{,}1$, $a_2 = 2{,}15 \pm 0{,}1$?

4.4.* Умножение приближённого значения на фиксированное число. Пусть b — приближённое значение величины a, абсолютная погрешность которого не превосходит p, то есть $|a - b| \le p$. Возьмём фиксированное число c.

Произведение bc является приближённым значением для ac. Оценим погрешность этого приближения. Используя свойства модуля, получим

$$|ac - bc| = |(a - b)c| = |a - b| \cdot |c|.$$

Таким образом,

Абсолютная погрешность произведения приближённого значения b величины a и фиксированного числа c равна произведению абсолютной погрешности величины a и модуля числа c.

Это правило позволяет оценить абсолютную погрешность произведения приближённого значения b величины a и фиксированного числа c:

$$|ac - bc| = |a - b| \cdot |c| \le p \cdot |c|.$$

Пример 2. Для вычисления площади круга, имеющего радиус 2 см, использована формула $S \approx 3{,}14 \cdot 2^2$. Требуется оценить погрешность этой формулы.

Так как приближённое значение $\pi \approx 3{,}14$ найдено по правилам округления, то абсолютная погрешность этого приближения числа π не превосходит 0,005. По правилу оценки абсолютной погрешности произведения приближённого значения некоторой величины и фиксированного числа получаем:

$$|\pi \cdot 2^2 - 3{,}14 \cdot 2^2| = |\pi \cdot 2^2 - 12{,}56| \le 0{,}005 \cdot 4 = 0{,}02.$$

Вопрос. Как оценить абсолютную погрешность формулы $S \approx 3{,}14 \cdot R^2$ для площади круга, если $R = 5$ см?

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, почему в календаре присутствуют високосные годы.

2. Что можно сказать об абсолютной погрешности суммы приближённых значений?

3. Как оценивается абсолютная погрешность разности приближённых значений?

4. Чему равна абсолютная величина произведения двух чисел?

5. Чему равна абсолютная погрешность произведения приближённого значения некоторой величины и фиксированного числа?

Задачи и упражнения

1. Найдите сумму приближённых значений a, b и оцените её погрешность:

а) $a = 283 \pm 7$, $b = 132 \pm 4$;

б) $a = 1{,}34 \pm 0{,}06$, $b = 0{,}67 \pm 0{,}02$;

в) $a = 1{,}56 \pm 0{,}04$, $b = -2{,}72 \pm 0{,}08$;

г) $a = -0{,}627 \pm 0{,}005$, $b = 1{,}24 \pm 0{,}0{,}02$.

2. Округлите числа a и b до второго разряда после запятой, найдите сумму полученных результатов и оцените её абсолютную погрешность:

а) $a = 0{,}678$, $b = 1{,}432$; б) $a = -1{,}4$, $b = 0{,}444$;

в) $a = 2{,}345$, $b = -0{,}777$; г) $a = 0{,}1212$, $b = 3{,}222$.

3.* Найдите приближённое значение суммы a и b с абсолютной погрешностью не более 0,01:

а) $a = 3{,}5$, $b = 3{,}555$; б) $a = 2{,}183$, $b = 0{,}222$;

в) $a = 0{,}563 \pm 0{,}003$, $b = 0{,}555$; г) $a = 3{,}6363$, $b = 1{,}333$;

д) $a = 2 : 3$, $b = 1{,}2121$; е) $a = 1 : 7$, $b = 2{,}777$.

4. От дома до школы 500 м, а длина шага у Пети 50±5 см. Сосчитав число шагов по дороге в школу и обратно, Петя обнаружил, что результаты различаются на 220 шагов. Когда он рассказал об этом Васе, тот ответил, что этого не может быть. Как вы думаете, кто из них прав?

5.* Округлите второй сомножитель до второго разряда после запятой, найдите произведение и оцените абсолютную погрешность произведения:

а) $23 \cdot 0{,}348$; б) $3{,}5 \cdot 8{,}57$;

в) $12 \cdot 0{,}4333$; г) $2{,}8 \cdot 2{,}888$.

6.** Найдите произведение приближённого значения $2{,}5 \pm 0{,}05$ и числа 1,23. Какова абсолютная погрешность результата вычисления?

7.* Приближённое значение стороны квадрата равно $1{,}2 \pm 0{,}04$ см. Найдите приближённое значение периметра этого квадрата и укажите погрешность вычисления.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равна сумма приближённых значений $a = 27 \pm 0{,}14$ и $b = 12{,}2 \pm 0{,}11$?

1) $39 \pm 0{,}03$; 2) $39{,}2 \pm 0{,}03$; 3) $39 \pm 0{,}25$; 4) $39{,}2 \pm 0{,}25$.

1.2. При измерении величины a получено $a = 17{,}3 \pm 0{,}13$. Чему равно произведение $7a$?

1) $120{,}1 \pm 0{,}13$; 2) $120{,}1 \pm 0{,}91$; 3) $121 \pm 0{,}13$; 4) $121{,}1 \pm 0{,}91$.

1.3. Чему равна сумма трёх приближённых значений $a = 8 \pm 0{,}03$, $b = -4{,}7 \pm 0{,}09$, $c = -3{,}3 \pm 0{,}08$?

1) $0 \pm 0{,}02$; 2) $0 \pm 0{,}044$; 3) $0 \pm 0{,}14$; 4) $0 \pm 0{,}2$.

1.4.* При измерении получено $a = 2 \pm 0{,}1$ и $b = 3 \pm 0{,}2$. Чему равно значение $3a + 2b$?

1) $12 \pm 0{,}3$; 2) $12 \pm 0{,}5$; 3) $12 \pm 0{,}7$; 4) $12 \pm 0{,}9$.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. При измерении величин a и b получили $a = 12 \pm 0{,}07$ и $b = 13{,}7 \pm 0{,}11$. Каким может быть точное значение суммы $a + b$?

1) 25,45; 2) 25,65; 3) 25,85; 4) 25,95.

2.2. За приближённое значение суммы величин $a = 11{,}2 \pm 0{,}09$ и $b = 9{,}3 \pm 0{,}17$ выбрали число 20,5. Какие из оценок абсолютной погрешности этого значения являются верными?

1) 0,2; 2) 0,25; 3) 0,3; 4) 0,35.

2.3. Какие из расстояний могут быть пройдены в одном направлении за 100 шагов, если длина каждого шага $48 \pm 2{,}5$ (см)?

1) 45 м; 2) 47 м; 3) 49 м; 4) 51 м.

2.4.** Какие значения не может иметь произведение ab, если $a = 5 \pm 0{,}1$ и $b = 6 \pm 0{,}1$?

1) 28,8; 2) 29,6; 3) 30,4; 4) 31,2.

§ 5. ПРИБЛИЖЁННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДЕЛЕНИЯ

5.1. Приближённое значение частного. Деление — трудоёмкая операция. Оказывается, существуют формулы, позволяющие найти приближённое значение частного при помощи сложений, вычитаний и умножений. Такие формулы значительно облегчают вычислительную работу.

Чтобы разделить b на a, достаточно знать обратную к a величину $\frac{1}{a}$. Тогда деление сведётся к умножению по формуле

$$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}.$$

Рассмотрим простейший случай, когда ищется число, обратное к числу, близкому к единице.

Пусть задано близкое к единице число a. Представим его в виде $a = 1 + x$. Если значение $|x|$ достаточно мало, то величиной x^2 можно пренебречь по сравнению с $|x|$. Составим обратную к $1 + x$ дробь $\frac{1}{1 + x}$, а затем умножим её числитель и знаменатель на $1 - x$:

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1 - x}{1 - x^2}.$$

Если пренебречь малым слагаемым $-x^2$ в знаменателе последней дроби, то её величина также мало изменится и получится

$$\frac{1 - x}{1 - x^2} \approx \frac{1 - x}{1} = 1 - x.$$

Следовательно, справедлива приближённая формула

$$\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x. \qquad (1)$$

Вопрос. Можно ли доверять этой формуле при больших значениях $|x|$?

5.2. Оценка погрешности. Для применения на практике формулы (1) необходимо знать её погрешность, то есть оценку модуля разности между её левой и правой частями. В табл. 1 показано, насколько малым должен быть $|x|$, чтобы погрешность p не превосходила заданного значения.

Таблица 1

$\|x\|$	0,5	0,2	0,07	0,02	0,007	0,002
p	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001

Видно, что погрешность убывает гораздо быстрее, чем $|x|$. При $|x| < 0{,}02$ погрешность окажется меньше 0,001, а при $|x| < 0{,}002$ — меньше 0,00001. Такая точность вполне достаточна для решения очень многих практических задач.

Пример 1. Вычислим отношение $\frac{1}{0,94}$.

Представим 0,94 в виде $0,94 = 1 - 0,06$, а затем воспользуемся формулой (1), число x в которой равно $-0,06$. Получится

$$\frac{1}{0,94} = \frac{1}{1 - 0,06} \approx 1 + 0,06 = 1,06.$$

По таблице найдём оценку погрешности этого результата. Так как $|x| = 0,06 < 0,07$, то погрешность не больше 0,01. Следовательно,

$$\frac{1}{0,94} = 1,06 \pm 0,01.$$

Заметим, что все выкладки выполнены без использования деления.

Вопрос. Какую приближённую формулу для вычисления $\frac{1}{1-x}$ вы можете предложить?

5.3. Приближённое вычисление отношения.** Совсем исключать деление из обихода, конечно же, нет никакого смысла. Во всяком случае, деление десятичных дробей на 2, на 5 или на 10 выполняется достаточно просто. Покажем, что разумное сочетание приближённых методов с делением на небольшие целые числа очень часто позволяет находить отношения произвольных величин с достаточной степенью точности.

Пример 2. Вычислим отношение $\frac{3,62}{4,12}$.

Преобразуем эту дробь так, чтобы стало возможным использование приближённой формулы (1). Сначала разделим на 4 числитель и знаменатель искомой дроби, а затем представим её как произведение числителя и величины, обратной к знаменателю:

$$\frac{3,62}{4,12} = \frac{0,905}{1,03} = 0,905 \cdot \frac{1}{1,03}.$$

Теперь отношение $1 : 1,03$ можно легко найти по формуле (1):

$$\frac{1}{1,03} = \frac{1}{1 + 0,03} \approx 1 - 0,03 = 0,97.$$

Погрешность этого результата не превосходит 0,01.

По правилу умножения точного и приближённого значений находим, что

$$\frac{3,62}{4,12} = 0,905 \cdot \frac{1}{1,03} \approx 0,905 \cdot 0,97 = 0,87785$$

с погрешностью, не превосходящей $0,905 \cdot 0,01 < 0,01$. Отсюда следует, что значение отношения находится в промежутке [0,86785; 0,88785].

Для погрешности, не превосходящей 0,01, указание границ промежутка с таким количеством знаков в ответе чрезмерно. Заменим левый конец промежутка на его десятичное приближение снизу с точностью до 0,01, а правый конец промежутка — на его десятичное приближение сверху с точностью до 0,01 и получим промежуток [0,86; 0,89], в котором заведомо находится значение искомого отношения. Выбирая в качестве приближения для отношения середину последнего промежутка, получим 0,875 с абсолютной погрешностью, не превосходящей половины длины промежутка [0,86; 0,89]. Таким образом,

$$\frac{3{,}62}{4{,}12} = 0{,}875 \pm 0{,}015.$$

Вопрос. Как показать, что любая дробь $b : a$ после нескольких умножений (или делений) на 2 её числителя и знаменателя приводится к виду, когда возможно применение формулы (1)?

Контрольные вопросы и задания

1. Какой вид имеет приближённая формула для нахождения результата от деления единицы на число, близкое к единице?

2. Как пользоваться таблицей погрешностей приближённой формулы (1)?

3.* Как применять формулу (1) для приближённого вычисления частного двух близких друг к другу чисел?

Задачи и упражнения

1. По формуле (1) найдите приближённое значение частного:
а) 1 : 1,13; б) 1 : 0,82; в) 1 : 1,05; г) 1 : 0,94.

2. По формуле (1) найдите приближённое значение частного и с помощью табл. 1 оцените абсолютную погрешность:
а) 1 : 1,103; б) 1 : 0,982; в) 1 : 1,057; г) 1 : 0,948.

3. Найдите приближённое значение частного:
а) 2 : 2,12; б) 3 : 2,85; в) 5 : 5,07; г) 4 : 3,93.

4. Найдите приближённое значение частного и с помощью табл. 1 оцените абсолютную погрешность:
а) 2 :2,007; б) 3 : 2,954; в) 5 : 5,075; г) 4 : 3,936.

5.* Найдите приближённое значение частного:
а) 3,2 : 2,05; б) 2,8 : 1,9; в) 7,5 : 5,03; г) 6,4 : 3,94.

6.** Найдите приближённое значение частного и оцените абсолютную погрешность:
а) 4,34 : 2,08; б) 5,88 : 1,91; в) 7,15 : 5,02; г) 6,48 : 2,97.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равна разность $\frac{1}{1-x} - (1 + x)$?

1) $\frac{x}{1-x}$; 2) $\frac{x^2}{1-x}$; 3) $\frac{-x}{1-x}$; 4) $\frac{-x^2}{1-x}$.

1.2. Какое приближённое значение отношения $\frac{4}{0{,}993}$ получится, если применить приближённую формулу (1)?

1) 4,018; 2) 4,022; 3) 4,028; 4) 4,032.

1.3. Используя табл. 1 и приближённую формулу (1), определите, какая из приведённых погрешностей точнее всего соответствует приближённому значению 0,97 для величины, обратной к числу 1,03:

1) с абсолютной погрешностью 0,1;
2) с абсолютной погрешностью 0,01;
3) с абсолютной погрешностью 0,001;
4) с абсолютной погрешностью 0,0001.

1.4. Используя табл. 1 и приближённую формулу (1), определите, какой из приведённых результатов соответствует приближённому значению величины, обратной к 1,001:

1) 0,99 с абсолютной погрешностью, меньшей 0,01;
2) 0,909 с абсолютной погрешностью, меньшей 0,001;
3) 0,999 с абсолютной погрешностью, меньшей 0,00001;
4) 0,9999 с абсолютной погрешностью, меньшей 0,000001.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Используя табл. 1 и приближённую формулу (1), определите, какие отношения вычисляются с абсолютной погрешностью, меньшей 0,01:

1) $\frac{1}{1{,}015}$; 2) $\frac{1}{0{,}56 + 0{,}66}$; 3) $\frac{1}{1{,}035}$; 4) $\frac{1}{1{,}02}$.

2.2. Используя табл. 1 и приближённую формулу (1), определите, какие из частных можно вычислить с абсолютной погрешностью, меньшей 0,001:

1) $\frac{1}{1{,}015}$; 2) $\frac{1}{3{,}045}$; 3) $\frac{1}{5{,}006}$; 4) $\frac{1}{1{,}0017}$.

2.3. Какие из приведённых равенств получаются с помощью приближённой формулы (1)?

1) $\frac{1}{1,023} \approx 0,987$; 2) $\frac{1}{1,042} \approx 0,958$;

3) $\frac{1}{0,964} \approx 1,036$; 4) $\frac{1}{0,992} \approx 1,018$.

2.4.* Какие из приведённых равенств можно получить с помощью приближённой формулы (1)?

1) $\frac{2}{2,1} \approx 0,95$; 2) $\frac{4}{4,1} \approx 0,975$; 3) $\frac{2}{1,9} \approx 1,05$; 4) $\frac{4}{3,9} \approx 1,025$.

§ 6. ПРИБЛИЖЁННОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

6.1. О приближённом извлечении квадратных корней. При попытке найти квадратный корень из числа 12 345 678 с помощью восьмиразрядного калькулятора получим *приближённое* значение квадратного корня с восемью знаками: 3513,6417. Действительно, точное вычисление квадрата полученного числа приводит к равенству

$$(3513,6417)^2 = 12345677,99597889.$$

В отдельных случаях, например для чисел 4, 16, 25 и некоторых других, калькулятор вообще укажет точные значения квадратных корней 2, 4, 5 и так далее.

Вопрос. Что называется квадратным корнем из положительного числа a?

6.2. О таблице квадратных корней. Откуда калькулятор «берёт» значения квадратных корней? Неужели в его электронной памяти записана полная восьмизначная таблица корней из всех целых чисел от 1 до 99 999 999? Попробуем оценить объём памяти, который для этого потребуется.

Известно, что электронные вычислительные устройства оперируют с числами, записанными в двоичном коде. Всякое натуральное число от 1 до 99 999 999 в двоичном коде можно записать в виде 27-значного выражения, используя только цифры 0 и 1. Например, число 99 999 999 можно записать в виде:

$$101111101011110000011111111.$$

Значение двоичного разряда может быть либо 0, либо 1. Для обозначения информации о значении двоичного разряда применяется термин *бит*.

Для записи приближённого значения с восемью десятичными знаками каждого квадратного корня из натурального числа от 1 до 99 999 999 используется 27 битов. Поэтому для хранения всей такой таблицы потребуется $27 \cdot (10^8 - 1)$ битов.

Восемь битов составляют один *байт*, 2^{10} байтов — один *килобайт*, а 2^{10} килобайтов — один *мегабайт*. Таким образом, в одном мегабайте содержится

$$2^3 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{23} = 8\,388\,608 \text{ (битов)}.$$

Покажем, что для хранения таблицы потребуется более 300 мегабайтов:

$$27 \cdot (10^8 - 1) : 2^{23} = 27 \cdot 99\,999\,999 : 8\,388\,608 =$$
$$= (27 \cdot 10) \cdot 99\,999\,999 : (8\,388\,608 \cdot 10) =$$
$$= 270 \cdot (99\,999\,999 : (83886080) > 270 \cdot (99\,999\,999 : 88\,888\,888) =$$
$$= 270 \cdot (9 : 8) = 3 \cdot (810 : 8) > 3 \cdot 100 = 300.$$

Вопрос. Сколько байтов содержится в одном мегабайте?

6.3. Приближённая формула. Рассмотрим теперь вопрос об извлечении квадратных корней при помощи всего лишь четырёх арифметических действий и без использования вычислительной техники.

Сначала научимся извлекать корни из чисел, близких к единице. Составим выражение $\sqrt{1 + x}$ и подберём подходящую приближённую формулу для его вычисления. Будем считать, что $|x| \le \frac{1}{2}$. При этом условии значение x^2 мало по сравнению с $|x|$.

Преобразуем подкоренное выражение $1 + x$, выделив в нём квадрат суммы двух чисел. Для этого прибавим к нему и вычтем из него слагаемое $\frac{x^2}{4}$. Применив затем формулу квадрата суммы, получим

$$1 + x = \left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{4} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}.$$

Пренебрегая малым слагаемым $\frac{x^2}{4}$, превратим точное равенство в приближённое

$$1 + x \approx \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2.$$

Квадратные корни из левой и правой частей этого приближённого равенства также, очевидно, будут мало отличаться друг от друга. Но в правой части корень легко извлекается, следовательно,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \qquad (2)$$

Это и есть искомая приближённая формула.

Вопрос. Какое приближение даёт формула (2) — с избытком или с недостатком?

6.4. Таблица погрешностей. Приведём таблицу погрешностей (табл. 2), необходимую для практического применения формулы (2).

Таблица 2

$\|x\|$	0,5	0,2	0,07	0,02	0,007	0,002
p	0,05	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001

Видно, что по сравнению с формулой (1) формула (2) примерно в 10 раз точнее!

Пример 1. Вычислим $\sqrt{0{,}82}$.

Запишем 0,82 как $1 + x$. Имеем: $0{,}82 = 1 - 0{,}18$, то есть $x = -0{,}18$. Но тогда по формуле (2)

$$\sqrt{0{,}82} = \sqrt{1-0{,}18} \approx 1 - \frac{0{,}18}{2} = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$$

Погрешность этого результата не больше 0,01, следовательно,

$$\sqrt{0{,}82} = 0{,}91 \pm 0{,}01.$$

Вопрос. Когда погрешность формулы (2) не превосходит 0,006? Укажите какой-нибудь подходящий промежуток значений x.

6.5. Практическое вычисление корней.** Разные искусственные приёмы позволяют использовать формулу (2) для извлечения квадратных корней чуть ли не из любых положительных чисел. При этом получаются достаточно точные результаты.

Прежде чем переходить к следующему примеру, сделаем общее полезное замечание.

Для положительных чисел a и b произведение $a \cdot b$ можно записать в виде $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$. С другой стороны, $(\sqrt{a}\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}\sqrt{b}) = \sqrt{a}\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\sqrt{b} = a \cdot b$.

Таким образом, выполняется формула $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Пример 2. Вычислим приближённое значение $\sqrt{28}$.

Ближайшим к 28 квадратом целого числа является 25. Представим 28 в виде суммы этого квадрата и небольшого (по сравнению с 25) добавка:

$$28 = 25 + 3 = 25 \cdot \left(1 + \frac{3}{25}\right) = 25 \cdot (1 + 0{,}12).$$

Если теперь извлечь корень из произведения $25 \cdot (1 + 0{,}12)$, то получится

$$\sqrt{28} = \sqrt{25 \cdot (1 + 0{,}12)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{1 + 0{,}12} = 5\sqrt{1 + 0{,}12}.$$

Последний квадратный корень найдём по формуле (2):

$$\sqrt{1 + 0{,}12} \approx 1 + \frac{0{,}12}{2} = 1{,}06.$$

Погрешность этого результата не больше 0,01.

По правилу умножения точного и приближённого значений находим ответ

$$\sqrt{28} = 5\sqrt{1 + 0{,}12} \approx 5 \cdot 1{,}06 = 5{,}3$$

с погрешностью, не превосходящей $5 \cdot 0{,}01 = 0{,}05$. Во многих задачах такая точность нас вполне устроит.

***Вопрос*.** Как при помощи формулы (2) приближённо вычислить $\sqrt{15}$?

■ Контрольные вопросы и задания

1.* Какое наибольшее целое число можно записать четырьмя цифрами в двоичной системе счисления?

2. * Что такое бит, байт, килобайт?

3. Какой вид имеет приближённая формула для нахождения квадратного корня из числа, близкого к единице?

4.** Чему равен квадратный корень из произведения двух положительных чисел?

5.** Как применить формулу (2) к вычислению произвольных квадратных корней?

■ Задачи и упражнения

1. С помощью калькулятора найдите квадратные корни из чисел:

а) 3; б) 21; в) 56; г) 16129; д) 4,1;
е) 0,42; ё) 0,078; ж) 4,41; з) 2,25; и) 22,5.

2.* Сколько битов понадобится для записи чисел:

а) 6; б) 12; в) 49; г) 72; д) 127;
е) 128; ё) 129?

3. По формуле (2) найдите приближённое значение корня и с помощью табл. 2 оцените абсолютную погрешность:

а) $\sqrt{1,32}$; в) $\sqrt{1,064}$; б) $\sqrt{0,88}$; г) $\sqrt{0,982}$.

4.* Найдите приближённые значения квадратных корней из следующих чисел и с помощью табл. 2 оцените абсолютные погрешности результата вычислений:

а) 8; б) 50; в) 21; г) 72; д) 4,1;
е) 7,82; ё) 0,24; ж) 0,39; з) 0,891; и) 0,07.

5.** Найдите приближённую длину диагонали квадрата, сторона которого равна 3 см. Оцените с помощью табл. 2 абсолютную погрешность приближения.

6.** Найдите приближённую длину диагонали прямоугольника со сторонами 5 см и 6 см. Какова абсолютная погрешность этого приближения?

7.* Отложите на числовой оси число $\sqrt{2}$ с помощью циркуля и линейки.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.* Сколько байтов содержится в 20 килобайтах?

1) 10 120; 2) 10 240; 3) 20 480; 4) 204 180.

1.2. Какое из приведённых значений лучше всего принять за приближённое значение $\sqrt{35}$?

1) $6-\frac{1}{6}$; 2) $6-\frac{1}{12}$; 3) $6-\frac{1}{24}$; 4) $6-\frac{1}{36}$.

1.3. С помощью табл. 2 и формулы (2) определите, какой из приведённых результатов является верным для $\sqrt{0,87}$.

1) 0,945 с абсолютной погрешностью 0,01;
2) 0,925 с абсолютной погрешностью 0,001;
3) 0,935 с абсолютной погрешностью 0,01;
4) 0,955 с абсолютной погрешностью 0,001.

1.4. С помощью табл. 2 и формулы (2) определите, какой из приведённых результатов является верным для $\sqrt{1,03}$.

1) 1,10 с абсолютной погрешностью 1,0001;
2) 1,025 с абсолютной погрешностью 0,001;
3) 1,005 с абсолютной погрешностью 0,001;
4) 1,015 с абсолютной погрешностью 0,001.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.* Какие из указанных значений байтов меньше одного мегабайта?

1) 1 000 000; 2) 1 024 000; 3) 1 040 000; 4) 1 200 000.

2.2. Какие из приведённых значений меньше $\sqrt{6}$?

1) 2,3; 2) 2,4; 3) 2,5; 4) 2,6.

2.3.* Какие из приближённых равенств получаются с помощью приближённой формулы (2)?

1) $\sqrt{1,2} \approx 1,1$; 2) $\sqrt{1,05} \approx 1,025$;

3) $\sqrt{0,9} \approx 0,85$; 4) $\sqrt{0,95} \approx 0,975$.

2.4.** Какие из приближённых равенств можно получить с помощью приближённой формулы (2)?

1) $\sqrt{15} \approx 4 - \frac{1}{4}$; 2) $\sqrt{26} \approx 5,1$;

3) $\sqrt{50} \approx 7 + \frac{1}{7}$; 4) $\sqrt{80} \approx 9 - \frac{1}{18}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1. § 1. 1. 3. **2.** 9. **3.** 20. **4.** а) 4; б) 4; в) 4; г) 4. **5.** 8. **6.** $n(n-1)$. **7.** 4. **8.** 160. **9.** 11. **10.** 19 800.

§ 2. 6. а) 150°; б) 120°; в) 105°; г) 45°. **9.** *Указание.* 19 раз подряд отложить угол в 19°. **10.** а) 157°30′; б) 22°30′; в) 42°30′; г) 32°30′. **11.** 23. **12.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{12}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{10}$; е) $\frac{2\pi}{5}$. **13.** а) 180′; б) 300′; в) 2700′. **14.** а) 360″; б) 36000″; в) 1140″. **15.** а) 60°; б) 45°; в) 10°.

Глава 2. § 1. 1. а) 1024, 2048, 4096, 8192, 16 384, 32 768, 65 536, 131 072, 262 144, 524 288, 1 048 576; б) 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19 683, 59 049; в) 5, 25, 125, 625, 3125, 15 625. **2.** а) 5^3; б) 17^2; в) 3^5; г) $2^8 = 4^4 = 16^2$; д) $3^6 = 9^3 = 27^2$; е) $5^4 = 25^2$; ё) $2^{12} = 4^6 = 8^4 = 16^3 = 64^2$; ж) $6^4 = 36^2$. **3.** а) 2 097 152; б) 19 683; в) 117 649. **4.** а) 4; б) 3; в) 11; г) 2; д) 4. **5.** а) 3; б) 16; в) 5; г) 2; д) 6.

§ 2. 1. а) 3^{60}; б) 7^{163}; в) 6^{32}; г) 2^{55}; д) 2^{625}; е) 3^{n^2}. **2.** а) $9 \cdot 6^{m+3}$; б) 3^{5m}; в) 5^{101}; г) 3^{3k+3}; д) 2^{38}. **3.** а) a^{3m}; б) b^{3k+9}; в) $(abc)^{15}$. **4.** а) 3^{18}; б) 5^{63}; в) 2^{18}; г) 4^6. **5.** а) a^{5m+5}; б) c^{5m+5}; в) a^{nk+2k}; г) b^{mn+2n}; д) c^{6m}; е) a^{9n}. **6.** а) 6^3, $2^3 \cdot 3^3$; б) 10^5, $2^5 \cdot 5^5$, $2^3 \cdot 5^3 \cdot 10^2$; в) 72^2, $2^2 \cdot 6^4$, $8^2 \cdot 9^2$; г) 3^{12}, 27^4, $9^4 \cdot 3^4$; д) 80^2, $10^2 \cdot 2^4$, $10^2 \cdot 4^2$; е) 6^6, $2^6 \cdot 3^6$, $4^2 \cdot 6^2 \cdot 9^2$. **7.** а) 5; б) 9; в) 50; г) 37; д) 12; е) 34; ё) 7; ж) 11.

§ 3. 1. 1. **2.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $-\frac{10}{7}$; г) 1; д) 121; е) $\frac{2}{5}$. **3.** а) $\frac{1}{81}$; б) 1; в) $\frac{1}{81}$; г) $-\frac{1}{2^{49}}$. **5.** а) 31; б) 6,6666; в) 2,7273; г) 211; д) 61; е) −205. **6.** а) $\frac{100}{101}$; б) $\frac{6141}{2048}$.

§ 4. 1. а) 324; б) 7; в) 1; г) 9; д) 4; е) 2^{-50}. **2.** а) 1; б) 875; в) 25; г) 9; д) $\frac{16}{2401}$; е) $\frac{8}{78125}$; ё) $\frac{64}{81}$. **3.** 16. **4.** *Указание.* а) представить как $2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$; б) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$.

Глава 3. § 1. 3. а) V и R; б) a, b, c; в) v, t; г) V, R, H; д) E, m, v. **4.** а) −7,4; б) 141,8; в) $12\sqrt{2}$. **5.** а) −0,00065; б) 0,00043; в) $11 \cdot 25 \cdot 202$; г) $-\frac{163}{1300}$; д) $198\sqrt{3}$. **6.** а) −29,4; б) 100,2. **9.** а) $z + 2t^2 + abc$; б) $za + 2at^2 + zab$; в) $z + 2t^2 + za + 2at^2 + ab$; г) $a + z + 2t^2 + z^2 + 4zt^2 + 4t^4$; д) $2z + t + 2t^2 + z^2 +$

$+\ 4zt^2 + 4t^4$; е) $2z^2 + 6zt^2 - za + 4t^4 - 2at^2$. **10.** а) $z^2 + z + t + ab$; б) $z^2 + 3z + 2t$; в) $z^4 + z^2 + t^2 + 2z^2t + 2zt + 2z^3 + 2z + t$; г) $3z^3 + z^2t + 4z^2 + 4zt + t^2 + t + z$; д) $z^3 + z^2 + 3zt + t^2$; е) $6z^3 + 5z^2t + 3z^2 + zt^2 + 3zt + t^2 + 3z + 2t$.

§ 2. 1. Подстановкой: а) $a = b$ и $b = 1$; б) $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$; в) $a = 0$; г) $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$; д) $y = -1$; е) $x = -1$, $z = 1$; ё) $x = -1$; ж) $x = 10$. **2.** ё) *Указание.* В каждой паре скобок, идущих подряд, при раскрытии скобок получается $-x$; последняя скобка – непарная. **3.** а) $a^2 + 5a + 4$; б) $xy + x + y + 1$; в) $x^2y + xy^2 + x + y$; г) $m^2 - mn - 2n^2$; д) $6p^2 + 13pq + 6q^2$; е) $1 - 5x + 6x^2$; ё) $x^5 - 5x^3 + 4x$; ж) $x^4 + 4x^3 + 6x^2$; з) $3 - 2x + x^2 + 8x^3 - 2x^4$. **4.** *Указание.* Выражение X при подстановке числовых значений в его переменные принимает также числовое значение, которое равносильно подстановке вместо a в исходное тождество. **5.** а) $a^2 - 1 + a^2 + (a^2 + 1) = 3a^2$; б) $(b^3 - 1)(b^3 - 3) = b^6 - 4b^3 + 3$; в) $(3x^2 + 1)(4x^2 + 1) - 7x^2 = 12x^4 + 1$; г) $(2x)^3 = (x + 1)^3 + (x - 1)^3 + 6x(x - 1)(x + 1)$; д) $(m - n)^2 = m^2 + 2m(-n) + (-n)^2$; е) $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7$. **6.** См. указание к задаче 2. **7.** а) $(a^2 - b^2)ab = (a - b)(a + b)ab$; б) $(n^3 - n)n^2 = (n - 1)n^3(n + 1)$; в) $(a + b)b + (a - b)\,b = 2ab$; г) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$.

§ 3. 1. а) 6; б) 3; в) 6; г) 8; д) 55; е) 385. **2.** а) $-6a^2b^5$; б) m^2n^4; в) $-1{,}28a^4b^5$; г) $\frac{4}{25}m^4n^4$; д) $-a^9b^3c^6$; е) $a^6b^5c^3$; ё) $m^6n^5k^3$. **3.** а) 72 и 17; б) -24 и 8; в) 1,716 и 6; г) $\frac{1}{5}$ и 10. **4.** а) $-a^2b^2$; б) a^5b^3; в) $6a^3b^2$; г) $200a^4b^3$. **5.** а) $3a^2 - 5ab - 2b^2$, б) $2m^2 - mn + n^2$; в) $a^2m^2 - a^2nk + bcm^2 - bcnk$; г) $x^4 + bx^3 - ax^3 - abx^2$; д) $a^4 + a^2b^2$; е) $mkn^4 + m^4nk + mnk^4 - m^3k^3 - m^3n^3 - n^3k^3$; ё) $a^3 - b^3 + a^2b - ab^2 + a^2 - ab$; ж) $x^4 + 4x^3y$. **6.** а) нет подобных; б) $4abc - 2ac - 4bc$; в) $4x^2y^2 - 9xy^2$; г) $6mn^2 + 11m^3n + 10m^2n^2$; д) $5x^5 + 9x^4 + 2x^3 - 15x^2 - 6x - 6$; е) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. **7.** а) $3b^2 + 6ab - 3a^2$; б) $-x^3 - 2x^2 - 2x + 1$; в) $5a^2b - 7ab^2 - b^3 - 8a^3$; г) $-x^2 + 3y^2 - 8x + 13y - 7$; д) $5a^2 - 7ab - b^2$; е) $mn - 4n^2$. **8.** а) $3m^3n + 5m^2n^2 - 2mn^3$; б) $a^2b^2 + b^3c - a^3c - abc^2$; в) $x^8 + x^4 + 1$; г) $a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$; д) $m^9 + 8$; е) $x^4 + 2x^3 - 2x - 4$; ё) $p^2q + p^2r + pq^2 + q^2r + pr^2 + qr^2 + 3pqr$; ж) $b^6 - b^5 - b^4 + b^2 + b - 1$; з) $x^{15} + x^{14} + x^{13} + \ldots + x^2 + x + 1$. **9.** а) $-m^3 + 3mn^2 - 2m^2n$; б) $-3n^3$; в) $a^2 - 2ab + b^2 - 3a + 3b + 2$; г) $y^2 + 4y + 6$; д) $3x^2 + 4y^2$; е) $-3x^2 + 3$; ё) $a^3 - 3$; ж) 0.

§ 4. **1.** а) $(m + n)(m - n)$; б) $(2a - 3b)(2a + 3b)$; в) $(8p - 10q)(8p + 10q)$; г) $(5a - b^2)(5a + b^2)$; д) $(4m - 3ab)(4m + 3ab)$; е) $(\sqrt{7}p - 2\sqrt{2}q)(\sqrt{7}p + 2\sqrt{2}q)$. **2.** а) $(p - q)(p^2 + pq + q^2)$; б) $(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$; в) $(p - 10q)(p^2 + 10pq + {}$ $+100q^2)$; г) $(2a^2 - b^3)(4a^4 + 4a^2b^3 + b^6)$; д) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; е) $(2m + {}$ $+ 3n)(4m^2 - 6mn + 9n^2)$; ё) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b)$; ж) $(m + 2n)(m^2 - {}$ $- 2mn + 4n^2 + 4m - 8n)$; з) $(3a + 2b)(9a^2 + 4ab + 4b^2)$. **3.** $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$. **4.** $(a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$. **5.** а) $(4a^2 - b^2)(4a^2 + b^2)$; б) $(m^4 - {}$ $- n^4)(m^4 + n^4)$; в) $(ab - 1)(a^4b^4 + a^3b^3 + a^2b^2 + ab + 1)$; г) $(2a - 3b)((2a)^6 + {}$ $+ (2a)^5(3b) + (2a)^4(3b)^2 + (2a)^3(3b)^3 + (2a)^2(3b)^4 + (2a)(3b)^5 + (3b)^6$; д) $(a - {}$ $- m)(a^{24} + a^{23}m + a^{22}m^2 + \ldots + a^2m^{22} + am^{23} + m^{24})$. **6.** $(m^3 + n^3)(m^6 - m^3n^3 + {}$ $+ n^6)$. **7.** а) $2^{10} - 1 = 1023$; б) $\dfrac{3^9 - 1}{2} = 9841$; в) $-139\ 801$; г) $-14\ 762$; д) $\dfrac{2^{21} - 1}{2^{20}} = \dfrac{2047}{1024}$; е) $\dfrac{4^{10} - 1}{3 \cdot 4^9} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4^{10}}$; ё) $\dfrac{3^9 - 2^9}{3^8}$. **8.** $a^2 + b^2 = 4m^2 + 6n^2$. **9.** а) $(2a - \sqrt{3}b)(2a + \sqrt{3}b)$; б) $(\sqrt{5}a - \sqrt{2}b)(\sqrt{5}a + \sqrt{2}b)$. **10.** *Указание.* а) $132 - {}$ $- 105 = 27$ и делится на 9; б) $11 - 5 = 6$ и делится на 6; в) $7 + 4 = 11$ и делится на 11. **11.** *Указание.* а) равно $81^{25} - 16^{25}$ и делится на 65; б) равно $49^{500} - {}$ $- 25^{500}$ и делится на 24; в) равно $16^{15} + 49^{15}$ и делится на 65; г) равно $(3^5)^{21} + {}$ $+ (4^5)^{21}$ и делится на 1267. **12.** а) 21; б) 33; в) 117. **13.** а) 399; б) 2451; в) 3564; г) 9975. **14.** а) 324; б) 3249; в) 9801; г) 3 980 025; д) 3 996 001; е) 4 012 009.

§ 5. **1.** а) $(-2x + 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$; б) $2x^2 = (x + 1)^2 + 2(x^2 - 1) + {}$ $+ (x - 1)^2$; в) $(2m)^2 = (m + n)^2 + 2(m^2 - n^2) + (m - n)^2$; г) $(2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$; д) $(-0{,}1m)^2 = (0{,}1m)^2 - 0{,}04m^2 + (0{,}2m)^2$; е) $(5x + y)^2 = (2x + 3y)^2 + 2(2x + {}$ $+ 3y)(3x - 2y) + (3x - 2y)^2$. **2.** а) $4a^2 - 12ab + 9b^2$; б) $9 + 12x + 4x^2$; в) $9 - 12x + 4x^2$; г) $x^4 - 4x^2 + 4$; д) $16m^2 + 40mn + 25n^2$; е) $9a^4b^2 - 24a^3b^3 + {}$ $+ 16a^2b^4$; ё) $x^6 - 8x^5 + 16x^4$; ж) $1 - 2\sqrt{6}$. **3.** а) $(x + 3y)^2$; б) $(3a - b)^2$; в) $(m - 2)^2$; г) $(4 + 3a)^2$; д) $(x^2 + 2)^2$; е) $(\sqrt{3}a + \sqrt{2}b)^2$; ё) $(x^2 + x + 1)^2$. **4.** *Указание.* Перемножить и привести подобные члены. **5.** а) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$; б) $8x^3 - 12x^2y^2 + 6xy^4 - y^6$; в) $27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3$; г) $27a^6 - 27a^4b^2 + {}$ $+ 9a^2b^4 - b^6$; д) $64m^3 - 96m^3n + 48m^3n^2 - 8m^3n^3$; е) $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + {}$ $+ 3x + 1$. **6.** *Указание.* Возвести правую и левую часть в третью степень. **7.** а) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$; б) $m^4 - 8m^3n + 24m^2n^2 - 32mn^3 + 16n^2$;

в) $2a^4 + 48a^2b^2 + 32b^4$; г) $16x^3 + 64x$; д) $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$. **8.** а) $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$; б) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$. **9.** *Указание.* а) перенести 5 вправо и возвести в квадрат; б) вычесть $(\sqrt{26} + 5)^3 - (\sqrt{26} - 5)^3$; в) аналогично б. **10.** а) $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; б) $(a - 2b)^5 = a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$. **11.** а) 89 991; б) 15 999 976. **12.** а) 15; б) 70; в) 1; г) 90; д) $49 \cdot 24$.

Глава 4. § 1. 1. *Указание.* По второму признаку. **2.** *Указание.* По второму признаку. **3.** *Указание.* По двум катетам. **4.** *Указание.* По катету и острому углу. **5.** *Указание.* По сумме углов в треугольнике. **6.** *Указание.* По первому признаку. **7.** *Указание.* По третьему признаку. **8.** Построить два равных прямоугольных треугольника по гипотенузе и катету. **9.** *Указание.* Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними. **10.** *Указание.* Его диагональ равна 8.

§ 2. 3. Биссектриса и перпендикуляр к ней. **4.** *Указание.* б) сначала построить угол, равный углу при основании. **5.** *Указание.* б) сначала построить угол в 30°. **6.** См. задачу 5. **7.** *Указание.* б) на стороне угла отложить боковую сторону и из её вершины опустить перпендикуляр на другую сторону угла; д) построить прямоугольный треугольник по катету (перпендикуляру) и гипотенузе (боковой стороне). Далее достроить до равнобедренного. **8.** *Указание.* Отложить на другой стороне угла отрезок AC, равный α. К середине BC провести перпендикуляр до пересечения с AC. Полученная точка — искомая. **12.** *Указание.* Построить параллелограмм с диагональю — удвоенной медианой. **13.** *Указание.* Построить угол EAK, равный BAC. Отложить на AE отрезок AB, на AK — разность AD. Через середину BD провести перпендикуляр до пересечения с FK. Это точка C. **14.** *Указание.* Если a, b, c — катеты и гипотенуза, даны a и $d = b + c$. Поскольку $a^2 = (c + b)(c - b) = d \cdot (b - c)$, откуда можно построить $b - c$ (по пропорции). **16.** См. задачу 13.

§ 3. 1. *Указание.* а) по стороне и двум углам; б) следует из а. **2.** *Указание.* По стороне и двум углам. **3.** *Указание.* Высоты попадут в одну точку. **4.** *Указание.* По двум сторонам и углу между ними. **5.** *Указание.* Разделить на шесть равных равносторонних треугольников. **6.** *Указание.* По двум сторонам и углу (или трём сторонам). **7.** *Указание.* Соединить B с K и показать, что $BL = CK$, рассмотрев получившиеся равные углы у B и K. **8.** *Указание.* По двум сторонам и углу. **9.** а) и б) всего таких треугольников 12. **10.** а) всего таких треугольников 4; б) всего таких треугольников 8. **11.** *Указание*: а) $\angle ABN = \angle BAN$; б) по двум углам.

§ 4. 1. а) 6 см^2; б) 27,5 см^2; в) 0,24375 дм^2. **2.** а) 20; б) 13,5; в) 12,5; г) 14. **3.** $2 \cdot 0{,}82 \cdot 2{,}03 \cdot 80$ г. **4.** $\sqrt{10}$ и $2\sqrt{10}$, площадь 20. **5.** а) 50 ед.; б) 72π ед. **6.** а) 7,5 см^2; б) 12 см^2; в) 0,735 см^2. **8.** *Указание.* а) по теореме Пифагора вычислить части основания (9 см и 5 см); б) площадь равна 84, высоты $\frac{84}{13} \cdot 2$ и $\frac{84}{15} \cdot 2$. **9.** 36 см^2. **10.** 33 см^2. **11.** $AM = \frac{3}{10}AC$, $MN = \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{8}\right)AC$, площадь равна $20 \cdot \frac{66}{80} = \frac{33}{2}$. **12.** $22 \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{2}$ см^2. **13.** $\frac{4}{9} \cdot 81 = 36$ см^2. **14.** $\frac{114}{175}$. **15.** $7 \cdot 2 = 14$ см^2.

Глава 5. § 1. 1. а) -3; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) $1\frac{4}{15}$; д) нет решений; е) нет решений; ё) 3; ж) 0; з) все действительные числа. **2.** 22, 44 и 88 книг. **3.** 370 и 37. **4.** 117 и 39. **5.** 22 и 10. **6.** 82 мм и 26 мм. **7.** 60 тетрадей в клетку и 30 — в линейку. **8.** 40 км/ч. **9.** 700 км/ч и 800 км/ч. **10.** 300 г 25%-го и 200 г 60%-го. **11.** 3 кг 20%-го и 7 кг 30%-го. **12.** $13\frac{1}{3}$ кг. **13.** 9 кг 10%-го и 6 кг 20%-го. **14.** $1\frac{1}{3}$ кг. **15.** 1,2 кг. **17.** 2, 3, 4 и 5. **18.** 22 страуса и 14 лошадей. **19.** 27, 30 и 34. **20.** 640 км, 60 км/ч.

§ 2. 1. а) 5; б) $-0{,}75$; в) $-0{,}312$; г) 0,001. **2.** а) $\frac{3}{7}$; б) 0,3; в) 0,091; г) $-1{,}4$. **3.** а) $-\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $4\frac{8}{63}$; г) -2920; д) $-\frac{499}{501}$; е) $-1{,}07$; ё) $\frac{157}{205}$; ж) $\frac{215}{309}$. **4.** а) -1; 2; б) 1; -3; в) 1; 2; 30; г) 4; 5. **5.** а) -1;0; б) 4; 0; в) -5; -6. **6.** Уравнения равносильны во всех случаях, кроме г. **7.** а) 1; б) 2; в) -3; г) $\frac{1}{2}$; д) $-0{,}5$; е) 3; -3; ё) -2; 0; 2; ж) -2, -1, 1, 2; з) 0; 5; и) 0; $-7{,}2$; й) 0; 8; к) 0; 3,9. **8.** а) -5; 3; б) 0; 4; в) -9; 1; г) -1;11. **9.** а) -2; 2; б) 0; в) нет решений; г) -9; -1; д) 1; 7; е) 6.

§ 3. 1. а) $3x + 11y = 6$; б) $x - 3y = 3$; в) $(u - y)^2 = 0$; г) $t - z = 0$; д) $6x + 3z = 5$; е) $x + y = -2$. **2.** Уравнения равносильны во всех случаях, кроме в и д. **3.** В случаях а и б решения — произвольные точки осей координат; в) решение — точки прямых $x = -1$ и $y = 1$; г) решения — точки прямых $x = 1$ и $x = -1$. **4.** а) Центр окружности — начало координат, радиус равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) центр — точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, радиус равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) центр — точка $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, радиус равен $\sqrt{\frac{3}{2}}$; г) центр — точка $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, радиус равен $\frac{3}{2}$.

Глава 6. § 1. **1.** *Указание.* а) отложите на прямой l отрезок, равный диагонали квадрата, и проведите перпендикуляр через его середину; б) отложите на прямой l отрезок, равный стороне квадрата, и проведите перпендикуляры через его концы; в) см. указание к пункту б. **2.** *Указание.* а) отложите на прямой l отрезок, равный стороне треугольника, и проведите две окружности с центрами в концах этого отрезка и радиусами, равными его длине; б) проведите высоту в данном треугольнике, отложите на прямой l отрезок, равный этой высоте, и проведите перпендикуляр через один из его концов; в) постройте треугольник, стороны которого в два раза меньше сторон данного, а одна из них лежит на прямой l. **3.** *Указание.* а) отложите на прямой l отрезок, равный стороне a треугольника, и проведите две окружности с центрами в концах этого отрезка и радиусами, равными b и c; б) проведите высоту в данном треугольнике к стороне a, отложите на прямой l отрезок, равный этой высоте, и проведите перпендикуляр через один из его концов. **4.** *Указание.* Две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются или совпадают. **5.** *Указание.* Через один из концов высоты проведите перпендикулярную ей прямую, а затем постройте окружности с центрами в другом конце высоты и радиусами, равными заданным сторонам треугольника. **7.** *Указание.* Диагонали AC и BD всякого ромба $ABCD$ перпендикулярны; если предположить, что AB перпендикулярна AC, то из точки B к прямой AC будет проведено два разных перпендикуляра. **11.** *Указание.* Воспользуйтесь свойством: прямая пересекает отрезок тогда и только тогда, когда концы отрезка лежат в разных полуплоскостях, определяемых этой прямой.

§ 2. **1.** а) $201°$; б) $45°$; в) $201°$. **2** и **3.** *Указание.* Во всех случаях можно установить равенство некоторых внутренних накрест лежащих углов. **4.** а) $\angle BPQ = \angle APM = \angle PQC = 105°$, $\angle MPB = 75°$; б) $\angle APQ = 75°$, $\angle CQM = \angle DQN = \angle APM = 105°$; в) *Указание.* Рассмотрите внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении данных биссектрис прямой MN. **6.** $147°$ и $141°$. **7.** *Указание.* Воспользуйтесь равенством соответственных углов, образованных сторонами данных треугольников. **10.** *Указание.* Докажите равенство углов KAB и AKD. **12.** *Указание.* Докажите, что $\angle ABC = \angle BAD$ и $\angle ADC = \angle BCD$. **13.** $274°$. **14.** *Указание.* Покажите, что расстояния от любой точки прямой l до прямых a и b одинаковы. **15** и **16.** См. указание к задаче 14. **17.** *Указание.* Покажите, что $\angle ADC = \angle ACD$. **18.** *Указание.* Покажите, что $\angle ADC = \angle CAD$.

§ 3. **1.** а) $90°$; б) $82°$; в) $120°$; г) $132°$; д) $36°$; е) $76°$; ё) $108°$. **2.** а) $45°$; б) $60°$; в) $30°$; г) $75°$; д) $15°$; е) $54°$; ё) $42{,}5°$. **3.** а) $72°$, $72°$ и $36°$; б) $36°$, $36°$

и 108°. **4.** г) $\angle AOB = 180° - (\alpha + \beta)$, $\angle BOL = \angle AOM = \alpha + \beta$. **5.** 60°, 50° и 70°. **6.** *Указание.* Покажите, что $\angle ACB = \angle CBL$. **7.** *Указание.* Если точка H лежит на луче AC, то $\angle CGF = 108°$; если же точка H лежит на луче CA, то $\angle CGF = 34°$. **8.** 108°. **9.** $\angle BAH = 90° - \beta$, $\angle ACH = 180° - (\alpha + \beta)$. **10.** *Указание.* Пусть в треугольнике ABC угол C — прямой, угол B равен 30°, D — середина гипотенузы. Покажите, что треугольник CBD — равнобедренный, а треугольник ACD — равносторонний. **11.** 39°. **12.** $\angle LMN = 120°$, $\angle KLM = 85°$, $\angle NKL = 60°$, $\angle MNK = 95°$. **13.** 180°.

Глава 7. § 1. 2. а) $<$; б) $>$; в) $<$; г) $>$; д) $<$; е) $>$; ё) $>$. **3.** а) $>$; б) $<$; в) $>$; г) $>$. **4.** а) $>$; б) $>$; в) $>$; г) $<$; д) $<$; е) $<$; ё) $<$; ж) $<$; з) $<$; и) $>$; й) $>$. **5.** Например, $a = -\frac{1}{2}$, $b = -2$. **6.** $2 > 1$, $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$, $\frac{4}{5} > -\frac{8}{11}$. **7.** Истинно для а, б, д. **8.** Истинно для в и д. **9.** а) -10; б) $-1{,}2$; в) $\frac{4}{12}$; г) 2,56; д) 0; е) $-5{,}321$. **10.** $a = 0$. **11.** Например, а) 11 и -10; б) -11 и 10 **12.** а) $\frac{16}{25}$; б) $\frac{1}{10}$; в) -6; г) $-\frac{1}{5}$; д) $\frac{64}{21}$; е) 12. **13.** 5. **14.** -4. **15.** 9. **16.** *Указание.* а) $1 > 0$; б) $3 > 1$; в) $6 > 2$; г) $2 > -4$. **17.** а и б — по правилу из п. 1.8; в) по правилу из п. 1.7; г) по правилу из п. 1.7 и 1.8. **18.** а) $-1 < 2$; б) $-4 < 0$; в) $-6 < -2$; г) $-4 < 0$. **19.** *Указание.* а) умножением на 2; б) умножением на 4 и сложение с 3; в) умножением на 3 и сложение с 1; г) умножением $a \cdot \frac{1}{a} > a \cdot 0$, следовательно, $\frac{1}{a} > 0$; д и е — аналогично г.

§ 2. 1. *Указание.* $b - 2 > 0$ и $a - b > 0$, поэтому $(a - b) + (b - 2) > 0$. **2.** $a = b$ и $b = 0$. **3.** а) $x > 2$; б) $x < \frac{3}{2}$; в) $x > -2$; г) $t < -5$; д) $x > -\frac{1}{3}$. **4.** а) нет решений; б) все действительные числа, кроме -2; в) все действительные числа; г) нет решений. **5.** а) $x > -20$; б) $x < \frac{5}{3}$; в) $x > 0$; г) $x > \frac{7}{3}$; д) нет решений. **6.** а) $x > \frac{4}{3}$; б) $x < \frac{5}{2}$; в) $x < -\frac{4}{7}$; г) $x < 0$; д) все действительные числа, кроме 0; е) $x < -13$. **7.** а) $x < \frac{15}{26}$; б) $x > -\frac{24}{17}$; в) $x > 9$; г) $x > \frac{3}{2}$; д) $x > -\frac{3}{4}$. **8.** а) положительным; б) положительным; в) положительным; г) положительным; д) отрицательным; е) любым по знаку. **9.** *Указание.* а) $a > \frac{1}{2}$; б) $a > 3$; в) $a = -5b$. **10.** *Указание.* а) левая часть неравенства меньше 1, справа оба сомножителя больше 1; б) $mn + 2m < mn + 2n$. **11.** Например, а) 5, 10, 100; б) 100, 101, 500. **12.** а, б — все действительные числа;

в) $t > 0$; г) все действительные числа, кроме 0; д) $x > 0$. **13.** а) $-12 < -10$; б) $a > \frac{1}{2}$; в) $3a(a^2 + 2) > b(a^2 + 2)$; г) $4a^2 > 4b^2$; д) $-(2a + 1)(a^2 + 1) < -(a^2 + 1)$. **14.** а) $\frac{-2}{5} < -\frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$; в) $a > b$. **15.** *Указание.* $a^2 + b^2 > -2ab$, при этом одно из чисел a или b отрицательно. **16.** а) $-5 > 9$; б) $5 - a > 1 - a$; в) $5 + a^2 > 1 + a^2$. **17.** а) $6 > 2$; б) $5 + b > 1 + b$; в) $x^2 - y^2 + 5 > x^2 + y^2 + 1$; г) $2xy + 5 > 2xy + 1$.

§ 3. 1. $a = b$. **2.** *Указание.* $a^2 \geq 0$ для всех a. **3.** *Указание.* $a = c - b$. **4.** *Указание.* Использовать правило; если $ac = bc$, то $a = b$ или $c = 0$. **5.** *Указание.* а, б — использовать свойства квадрата; в) $2 > 0$; г) $y^2 > -2$; д) $6 > 4$. **6.** а) $a + 2 \geq b + 2$; б) $a - 10 \geq b - 10$; в) $a^2 + a \geq a^2 + b$; г) $2a + 3 \geq 2b + 3$. **7.** а) $2a \geq 3b - 7$; б) $2a - 3b + 7 \geq 0$; в) $4 \geq 3b - 2a - 3$; г) $2a - 3b + 4 \geq -7$; д) $2a - b + 4 \geq 2b - 3$; е) $0 \geq 3b - 2a - 7$; ё) $2a + 7 \geq 3b$. **8.** *Указание.* $(a - b)^2 \geq 0$; $a^2 + b^2 = 2ab$, если $a = b$. **9.** *Указание.* $(a - 1)^2 \geq 0$; $a = 1$. **10.** *Указание.* $(x - 2)^2 \geq 0$; аналогично при $x < 0$ (при умножении знак неравенства меняется на противоположный). **11.** а) $x \geq -2a$; б) $x \leq \frac{5}{6}a$; в) $x \geq \frac{2a - a^2 - 1}{6}$. **12.** а) нет; б) да. **13.** а) нет; б) да. **14.** а) нет; б) нет; в) да. **15.** а) $x > 4{,}95$; б) $x < 4{,}95$; в) $x \geq 4{,}95$; г) $x \leq 4{,}95$. **16.** а) все действительные числа, кроме 2,2; б) все действительные числа, кроме 18; в) все действительные числа, кроме $\frac{14}{9}$. **17.** а) $x > -0{,}5$; б) $x \leq \frac{251}{135}$; в) $x \geq \frac{1}{24}$; г) $x \leq 3$; д) $x \leq -\frac{187}{120}$. **18.** а) $x \leq -\frac{3}{2}$ или $x \geq 2$; б) $-\frac{3}{2} \leq x \leq 2$.

§ 4. 1. *Указание.* а) $(-\infty; -3)$; б) $(-\infty; -4]$; в) $(-\infty; -2)$; г) $\left(-\infty; -\frac{110}{3}\right]$; д) $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$. **2.** а) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; в) $(5; +\infty)$; г) $\left[\frac{10}{13}; +\infty\right)$. **3.** а) $x < 0$; б) $x \leq 0$; в) $x = 0$; г) $x = 1$; д) $x \geq 0$. **4.** а) $(-\infty; 3]$; б) $(-\infty; 4{,}3)$; в) $(5; +\infty)$; г) $[-8; \infty)$. **5.** а) $(-\infty; a]$, если $a \geq 0$; $(-\infty; 2a]$, если $a < 0$; б) $(-\infty; a]$, если $a \leq 0$ и $a \geq 1$; $(-\infty; a^2]$, если $0 < a < 1$. **6.** а) x — любое; б) нет решений.

§ 5. 1. Например, $-1 < 2$ и $3 > 2$. **2.** Например, $-1 < 0{,}5$ и $-2 < 0{,}5$. **3.** Например, $-5 < 2$ и $-1 < -0{,}5$. **4.** *Указание.* а) $a^2 > 1$; б) $a^2 < 1$; в) $a^2 < 1$; г) $a^2 > 1$. **5.** *Указание.* а) $-a > -b$; б, в, г — аналогично а. **6.** *Указание.* а) $3a > 12$, $4b > 20$; б) $ab > 20$; в) $a^2 > 16$, $b^2 > 25$; г) аналогично а и в. **7.** *Указание.* $a + \frac{1}{a} \geq 2$ или $(a - 1)^2 \geq 0$. **8.** *Указание.* а) $b < a$;

б) $b^2 < ab < a^2$; в) продолжая аналогично б. **9.** *Указание.* а) $a > 1$; б) $a^2 > 1$ (аналогично 8б); продолжая аналогично б. **10.** *Указание.* а) $a \leq 1$; б) $a^2 \leq 1$ (аналогично 8б); в) продолжая аналогично б. **11.** *Указание.* $4a^2 - 4a + 1 \geq 0 \to 4a^2 - 4a + 2 \geq 0 \to 2a^2 - 2a + 1 \geq \frac{1}{2} \to a^2 + (1-a)^2 \geq \frac{1}{2}$. **12.** *Указание.* Использовать неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Глава 8. § 1. 1. *Указание.* Построить параллелограмм $ABCK$ и в треугольнике KCD провести среднюю линию. **2.** *Указание.* Доказать равенство четырёх получающихся треугольников. **3.** Прямоугольника. **5.** Прямоугольника. **6.** *Указание.* Доказать равенство расстояний между парами параллельных биссектрис. **7.** 35 мм. **8.** *Указание.* Вычислить площадь треугольника, используя перпендикуляры к равным сторонам. **9.** *Указание.* Вычислить площадь треугольника, используя перпендикуляры ко всем сторонам.

§ 2. 1. *Указание.* Воспользоваться вторым признаком параллелограмма. **2.** *Указание.* Рассмотреть симметрию относительно биссектрисы. **3.** *Указание.* Диагонали этого четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам и равны . **4.** *Указание.* Сначала доказать, что углы четырёхугольника прямые. **5.** *Указание.* Воспользоваться вторым признаком параллелограмма. **7.** *Указание.* Провести перпендикуляр из вершины B к отрезку CP. **8.** г) *Указание.* Построить вспомогательный треугольник с заданной стороной, противолежащим углом, равным половине заданного угла, и другой стороной, равной половине суммы диагоналей. **9.** *Указание.* Достроить треугольник до параллелограмма. **10.** *Указание.* Построить параллелограмм с заданным углом, у которого точка M — пересечение диагоналей. **11.** *Указание.* Достроить треугольник до параллелограмма. **12.** *Указание.* Воспользоваться результатом задачи 11.

§ 3. 1. 50 км. **2.** $18\sqrt{2}$ см^2. **3.** 120 см^2. **4.** $31{,}5\sqrt{3}$ см^2. **5.** 15 см^2. **6.** 30 см. **7.** $\frac{mnp}{2(m+n)}$. **8.** *Указание.* Суммы площадей каждой пары треугольников равны половине площади параллелограмма. **10.** *Указание.* Разделить каждую из противолежащих сторон на три равные части. **12.** *Указание.* Площади незакрашенных треугольников попарно равны.

§ 4. 1. *Указание.* Рассмотреть центральную симметрию относительно центра квадратов. **3.** Симметричную относительно точки F. **4.** *Указание.* Вершина многоугольника не может быть центром симметрии. **5.** *Указание.* Центр симметрии должен быть вершиной ломаной. **6.** Например, прямая. **9.** *Указание.* Например, построить прямую, симметричную заданной прямой относительно точки F. **10.** *Указание.* Построить окружность, симметричную одной из заданных окружностей относительно точки пересечения. **11.** *Указание.* Выбрать в качестве центра симметрии точку меньшей окружности и отобразить относительно неё бо́льшую окружность. **13.** в) $(-7; -3)$, $(-7; 3)$, $(7; -3)$, $(7; 3)$.

Глава 9. § 1. **1.** 7 см. **2.** 5 см, 5 см и 6 см. **3.** 14 см. **6.** *Указание.* Покажите, что каждая сторона четырёхугольника $MNKL$ параллельна одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$. **7.** 3 см. *Указание.* Через точку B проведите прямую, параллельную данной, и найдите расстояние от середины отрезка AB до этой прямой. **8.** *Указание.* Через каждую из данных точек проведите прямую, параллельную отрезку с концами в двух других точках. **9.** *Указание.* Пусть M и N — точки пересечения диагонали AC с отрезками BK и DL соответственно. Покажите, что M и N — точки пересечения медиан в треугольниках ABD и BCD. **10.** См. указание к предыдущей задаче. **11.** *Указание.* Воспользуйтесь задачами 4 и 5. **12.** *Указание.* Соедините данные точки отрезками. Два из них будут параллельны диагоналям параллелограмма, а третий — паре его сторон.

§ 2. **4.** На любое число частей, кратное 18. **5.** 5 : 2. **6.** 1 : 9. **7.** 2 : 3. **8.** 3 : 5. **9.** 30 : 77. **10.** 1 : 2. *Указание.* Докажите равенство $DK : KH = BG : GH$. **11.** 2 : 1. *Указание.* Докажите равенство $KP : PN = CM : MN$ и найдите последнее отношение. **12.** 3 : 7. *Указание.* Через точку K проведите прямую, параллельную BM. **13.** 7 : 3. **14.** В 2,5 раза. *Указание.* Пусть длина второго бревна оказалась в итоге равной x. Тогда длина первого бревна окажется равной $4x$. Если через y обозначить длины отпиленных частей, то получим равенство $(4x + y) = 3(x + y)$, откуда легко найти отношение $x : y$. **15.** *Указание.* Через точку M параллельно BC проведите отрезок прямой до пересечения с продолжением стороны AC. **16.** *Указание.* Пусть ABC — искомый треугольник, BD — его медиана, O — точка пересечения медиан. На продолжении BD отложите отрезок DE, равный OD, и рассмотрите треугольник AOE. **17.** *Указание.* Пусть ABC — искомый треугольник, AC — заданная сторона, O — точка пересечения медиан. Постройте сначала треугольник AOC. **18.** *Указание.* Пусть ABC — искомый треугольник, в котором заданы сторона AC и медианы BD и AE. Постройте сначала треугольник AOD, где O — точка пересечения медиан.

§ 3. **3.** *Указание.* Через точку M проведите прямую, параллельную AD, и докажите, что она пройдёт через точку N. **4.** *Указание.* Покажите, что диагонали трапеции образуют равные углы с одним из её оснований. **5.** 3 м и 4 м. *Указание.* Пусть длина нижнего отрезка равна x, а длина верхнего равна y. Отрезок x — средняя линия трапеции с основаниями y и 5, а отрезок y — средняя линия трапеции с основаниями x и 2. Получаем систему уравнений $2x = y + 5$, $2y = x + 2$. **6.** 9 см и 21 см. **7.** 3,8 см. **9.** *Указание*. Постройте сначала треугольник, который получится, если через один из концов меньшего основания трапеции провести прямую, параллельную боковой стороне. **10.** *Указание*. Постройте треугольник, который получится, если через конец одной из диагоналей провести прямую, параллельную другой диагонали, до пересечения с продолжением основания трапеции. **11.** *Указание*. Постройте прямоугольник, одна сторона которого равна данному основанию, а вторая — высоте трапеции. Второе основание трапеции лежит на прямой, проходящей через сторону прямоугольника, параллельную заданному основанию. **12.** См. указание к задаче 9. **13.** 5 см и 9 см. **14.** 12 см и 8 см. **15.** 60 мм. *Указание*. Покажите, что треугольник ADE — равнобедренный. **16.** 107,5 см. **17.** 35 мм. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма. **18.** 2400 см^2. **19.** 288 см^2. **20.** 140 см^2 и 116 см^2. **21.** 180 см^2. **22.** 3 : 5. **23.** $(3a + b) : (a + 3b)$. **24.** *Указание*. Сравните площади треугольников ABD и ACD, а затем выясните, чем эти треугольники отличаются соответственно от ABP и CDP. **25.** *Указание*. Средние линии всей трапеции и заштрихованной части совпадают. **26.** *Указание*. Покажите, что средняя линия заштрихованной части в три раза короче средней линии всей трапеции. **27.** $R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. *Указание*. Проведите высоту трапеции через центр круга. **28.** *Указание*. Оцените, какую часть площади трапеции составляет сумма площадей треугольников AMD и MBC.

Глава 10. § 1. 1. *Указание.* Сначала найти столбец, из которого вычисляется коэффициент пропорциональности. **2.** Например, показать, что 2 : 80 не равно 3 : 90. **3.** а) 400 г; б) 600 г; в) 4 кг; г) 10 кг 400 г. **4.** В пунктах а, в, г.

§ 2. 3. а) 23°F, 68°F, 176°F, −58°F, 96,8°F; б) $-12\frac{7}{9}$°C, $-1\frac{1}{9}$°C, $-26\frac{1}{9}$°C, $148\frac{8}{9}$°C, $-45\frac{5}{9}$°C. **4.** а) К = 273 + С; б) С = К − 273. **5.** а) −1; б) −0,5; в) −2; г) −3; д) 0,5; е) 1,5. **6.** а) 3; б) 6; в) −0,5. **7.** а) 8; б) −5; в) −5. **11.** а) 1,5; б) 2; в) −0,25; г) 2. **12.** При $a = 1$ и $a = -1$. **13.** а) Если $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{2 - a}$, при $a = 2$ корней нет; б) $x = \frac{2a - 5}{3}$; в) если $a \neq 0$, то $x = \frac{4}{a}$, при $a = 0$ корней нет; г) если $a \neq 2$ и $a \neq -2$, то $x = \frac{2}{a^2 - 4}$, при $a = 2$ и $a = -2$ корней нет; д) если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то $x = 0$, при $a = 0$ и $a = 1$ все числа.

§ 3. 2. *Указание.* а) $x_{n+1} - x_n = 1$; б) $x_{n+1} - x_n = 8$; в) $x_{n+1} - x_n = 3$; г) $x_{n+1} - x_n = 12$; д) $x_{n+1} - x_n = 0{,}5$. **3.** а) $a_1 = 1{,}5$ и $d = 1{,}5$; б) $a_1 = -12$ и $d = 2{,}5$; в) $a_1 = 2$ и $d = 2$; г) $a_1 = -13$ и $d = 0{,}5$; д) $a_1 = 2$ и $d = 3$. **4.** а) 4779; б) 494 550; в) 754 492; г) $\frac{(n-m+1)(n+m)}{2}$. **5.** а) 10 400; б) 759; в) 204. **6.** а) 143; б) 300; в) 455; г) −97,5; д) −639; е) 2,2; ё) 48. **8.** *Указание.* а) Прибавить к 50^2 число 50; б) сложить 50^2 и $50^2 + 50$; в) результат задачи а разделить на 2. **9.** 5000.

§ 4. 1. $a + bx$. **2.** $V = 4x(5 - x)(10 - x)$. **3.** $S = \sqrt{3}(2x - 15)(15 - x)$. **4.** $S = R - 2R^2 + \frac{\pi R^2}{2}$. **5.** $T = 3n$. **6.** $S_n = \frac{n(n+2)}{3}$. **8.** а) $x = 1$; б) $x = -\frac{6}{5}$; в) $x = \frac{1}{3}$, $x = -3$; г) $x = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{2}$. **9.** 3 и 7. **10.** −3 и 5. **11.** а) Прямые $y = x$ и $y = -x$; б) квадрат с вершинами в точках (0; 1), (0; −1), (1; 0), (−1; 0).

Глава 11. § 1. 2. *Указание.* Через центр окружности провести прямую, перпендикулярную заданной прямой. **3.** *Указание.* Построить окружность, концами диаметра которой являются заданная точка и центр заданной окружности. **4.** Два решения. **5.** *Указание.* Точки касания симметричны относительно прямой, проходящей через заданную точку и центр окружности. **7.** а) r; б) $r\sqrt{2}$; в) $r(\sqrt{2} - 1)$. **8.** а) $R\sqrt{3}$; б) R. **9.** *Указание.* В один из заданных углов вписать окружность заданного радиуса, в ней провести касательную под другим заданным углом к одной из сторон первого угла. **11.** Это ромб. **14.** *Указание.* Сначала построить произвольную окружность, касающуюся прямых. **15.** *Указание.* Можно найти расстояние от центра окружности до этой прямой. **16.** *Указание.* Сначала построить произвольную окружность заданного радиуса, касающуюся заданной прямой. **17.** *Указание.* Можно найти расстояние от искомой точки до центра окружности. **18.** 2 см, 4 см и 6 см. **19.** 2 см. **20.** *Указание.* Это следует из формулы, выражающей длины отрезков. **21.** 5,5 см. **22.** 5 см и 4 см. **23.** *Указание.* Построить касательную, параллельную CD. **24.** *Указание.* Построить касательную, параллельную CD. **25.** *Указание.* Воспользоваться результатами задач 23 и 24.

§ 2. 1. $\sqrt{99}$ см. **2.** $\sqrt{13}$ см. **3.** $\sqrt{65}$ см. **4.** $6\sqrt{5}$ см. **5.** а) 12 см; б) $\sqrt{24}$ см; в) $\sqrt{440}$ см. **6.** а) 20 см; б) $\sqrt{85}$ см. **7.** а) 84 см; б) $2\sqrt{ab}$. **8.** 2 см и 10 см. **9.** 1,25 см и 5 см. **10.** *Указание.* Линия центров является осью симметрии кругов. **11.** *Указание.* Треугольники, изображённые на рисунке, равнобедренные. **12.** *Указание.* Отметить центры окружностей и соединить с соответствующими точками касания. **13.** *Указание.* Построить общую касательную к окружностям и рассмотреть точку пересечения касательных. **14.** *Указание.* Перечисленные отрезки выразить через стороны треугольника. **16.** *Указание.* Продолжить касательные до пересечения и рассмотреть отрезки касательных. **17.** *Указание.* Построить вспомогательный треугольник, проведя через центр одной окружности прямую, параллельную общей касательной. **19.** *Указание.* Построить касательные к окружности, перпендикулярные биссектрисе угла. Меньшая из искомых окружностей будет вписанной в один из получившихся треугольников; бóльшая — вневписанной для другого треугольника. **20.** *Указание.* Для искомого треугольника заданная точка будет точкой касания со вневписанной окружностью. **21.** *Указание.* Это окружность. **22.** *Указание.* Это окружность, центр которой в середине заданного отрезка. **23.** *Указание.* Это общая касательная. **24.** *Указание.* Это ось симметрии.

Глава 12. § 1. 1. а) да; б) нет; в) нет; г) нет. **2.** Нет таких пар. **3.** а) $(-35; -3)$; б) $(-10; -8)$; в) $(-6; -28)$; г) $\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$; д) $(-1; -1)$; е) $(2006; -1)$. **4.** а) $(1; 1)$; б) $\left(\frac{23}{35}; -\frac{1}{5}\right)$; в) $\left(\frac{15}{13}; -\frac{14}{13}\right)$. **5.** а) $(1{,}3; 0{,}8)$; б) $(2{,}5; 1)$; в) $(2; -1)$; г) $(1; 2)$. **6.** а) $(5; 2)$; б) $(2; 3)$; в) $(5; 2)$; г) $(3; 4)$; д) $(3; 4)$; е) $(5; -2)$. **7.** а) $\left(11\frac{2}{3}; 5\right)$; б) $(5; -2)$; в) $(0{,}4; 1{,}5)$; г) $\left(1\frac{1}{7}; 1\right)$; д) $\left(2\frac{3}{4}; -1\frac{1}{6}\right)$; е) $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$; ё) $(59; 369)$. **8.** а) $(3a + 2; a)$ или $\left(b; \frac{b-2}{3}\right)$, где a и b — любые числа; б) решений нет; в) $(30 - 20a; a)$ или $\left(b; \frac{30-b}{20}\right)$, где a и b — любые числа; г) решений нет. **9.** а) Если $a \neq 0$, то $\left(\frac{2}{a}; 2\right)$, при $a = 0$ решений нет; б) если $a \neq 0$, то $\left(\frac{1}{8}; 0\right)$, при $a = 0$ решения $\left(\frac{1}{8}; t\right)$, где t — любое число; в) если $a \neq -5$, то $\left(\frac{11-a}{a+5}; \frac{8}{a+5}\right)$, при $a = -5$ решений нет; г) если $a \neq -\frac{1}{3}$, то $(1; -1)$, при $a = -\frac{1}{3}$ решения $(t; 2 - 3t)$, где t — любое число. **10.** $(a; 2a - 4)$ и $\left(\frac{4+b}{2}; b\right)$, где a и b — любые числа.

§ 2. 2. а) нет таких значений; б) при $a \neq 1$, $a \neq -1$; в) при $a \neq 2$. **4.** *Указание.* Например: а) $x - y = 2$; б) $2x + 2y = 2$; в) $3x + 3y = 1$. **5.** а) если $a \neq 0$, то (0; 2), при $a = 0$ решения $(t; 2)$, где t — любое число; б) если $a \neq 0$, то $\left(0; -\frac{1}{a}\right)$, при $a = 0$ решений нет; в) при каждом a единственное решение $\left(\frac{1-a}{a^2+1}; \frac{1+a}{a^2+1}\right)$. **7.** 3 курицы и 4 овцы.

§ 3. 1. Например: а) (2; 2); б) (1; 1); в) (2; 3); г) (1; 8); д) нет. **2.** Например: а) (1; 2) и (2; 4); б) (1; 6) и (−1; 2); в) (0; −1) и (1; −3); г) (6; −7) и (−2; −3); д) (2; 2) и (−8; −3). **3.** а) $x = -1 + 5t$, $y = 1 - 2t$; б) $x = -1 + 2t$, $y = 1 - t$; в) $x = 1 + t$, $y = -1 - 3t$; г) $x = 2 + 3t$, $y = -3 - 7t$; д) $x = 3t$, $y = 3 + 5t$; е) $x = 1 + 3t$, $y = -1 + 2t$; ё) $x = 2t$, $y = -1 + 13t$; ж) $x = -2 + 13t$, $y = 3 - 17t$; з) $x = -1 + 11t$, $y = 2 + 17t$, где t — целое число во всех ответах. **4.** *Указание.* а) левая часть при целых значениях переменных делится на 3; б) левая часть при целых значениях переменных чётна; в) левая часть при целых значениях переменных делится на 5.

Глава 13. § 1. 4. *Указание.* Сначала доказать утверждение для точки M на стороне BC. **5.** *Указание.* Три раза использовать результат задачи 4. **6.** Точка пересечения диагоналей. **7.** *Указание.* Две соседние вершины симметрично отразить относительно точки пересечения диагоналей. **8.** а) $\angle BCD = 114°$, $\angle BAD = 79°$, $\angle ABC = 36°$, $\angle ADC = 131°$; б) $\angle ABC = 64°$, $\angle ADC = 129°$, $\angle BAD = 82°$, $\angle BCD = 85°$; в) $\angle ABC = 103°$, $\angle BCD = 120°$, $\angle ADC = 77°$, $\angle BAD = 60°$. **9.** 64°.

§ 2. 1. 36 см^2. **2.** $144\sqrt{3}$ см^2. **7.** *Указание.* Сначала построить треугольник, равновеликий четырёхугольнику. **8.** $\frac{1}{4}S$. **10.** $\frac{3}{4}S$. **11.** $5\frac{5}{7}$ см^2. **12.** $\frac{bc - mn}{bc} \cdot S$. **15.** $\frac{PHh}{2(H + h)}$. **16.** *Указание.* $S_{\Delta MBD} = S_{\Delta ABC}$. **17.** 1 : 2. **18.** *Указание.* $S_{\Delta ABM} : S_{\Delta BCM} = S_{\Delta ADM} : S_{\Delta DCM}$. **19.** *Указание.* Использовать результат задачи 18. **20.** *Указание.* Доказать, что $S_{\Delta ABN} + S_{\Delta CDN} = S_{\Delta ADM}$.

§ 3. 1. При $\alpha < 30°$. **2.** При $\alpha = 30°$. **3.** а) любые; б) при основании меньше 30°; в) при основании меньше 60°. **5.** а) 108°; б) 135°; в) 140°; г) 150°; д) 162°. **6.** *Указание.* $\frac{180(n-2)}{n}$ должно быть целым числом. **7.** Да, у него $36 \cdot 10^7$ сторон. **9.** Когда объединение отрезков тоже отрезок.

§ 4. 1. а) 6,5; б) 7,5; в) 8; г) 3. **3.** $\frac{49\sqrt{3}}{4}$. **4.** а) 1,5 см^2; б) 4,5 см^2. **5.** $\frac{(a^2 + b^2)\sqrt{3}}{4} + 2ab$. **7.** *Указание.* Провести диагональ, и для четырёхугольной части построить равновеликий треугольник. **8.** 4 см. **9.** 16 см. **10.** $\frac{2S\sqrt{3}}{9}$. **11.** а) $18\sqrt{3}$ см^2; б) $15\sqrt{3}$ см^2. **12.** 1682 или больше. **13.** *Указание.* Площадь круга равна $S = \pi R^2$, где R — радиус круга. **14.** а) 14,5; б) 18; в) 22.

Глава 14. § 1. 1. Приближённые: б, г, е, ж. **2.** Например, для каждого числа можно прибавить 0,05 (приближение сверху) и отнять 0,05 (приближение снизу). **3.** а) 0,33 и 0,34; б) 0,55 и 0,56; в) 0,42 и 0,43; г) 0,54 и 0,55; д) 0,3 и 0,31; е) 0,17 и 0,18. **4.** а) 83 572; б) 16 428; в) 3572; г) 6428; д) 572; е) 428; ё) 72; ж) 28; з) 2; и) 8. **5.** а) 0,0432; б) 0,0567; в) 0,0032; г) 0,0068; д) 0,0002; е) 0,0008. **6.** Абсолютная погрешность меньше или равна: а) 0,1 г; б) 0,15 г; в) 0,13 г. **7.** 7,71 г. **8.** а) да; б) нет; в) да. **9.** ±2 мл. **10.** а) [129; 135]; б) [2,15; 2,45]; в) [−7,67; −7,23].

§ 2. 1. а) 37; б) 84; в) 552; г) 66 690. **2.** а) 0,2571; б) 0,7088; в) 0,3328; г) 0. **3.** а) снизу 7,257 сверху 7,258; б) 14,708 и 14,709; в) 2,332 и 2,3333; г) 10 и 10,001. **4.** а) 7,1 и 7,2; б) 14,6 и 14,7; в) 2,3 и 2,4; г) 11 и 11,1. **5.** а) 63; б) 189; в) 248; г) 226. **6.** а) 0,48; б) 0,54; в) 0,71; г) 0,87. **7.** а) 17,4 и 17,5; б) 33,5 и 33,6; в) 17,7 и 17,8; г) 30,8 и 30,9. **8.** а) −5,42 и −5,419; б) −2,464 и −2,463. **9.** а) −0,2324 и −0,2323; б) 1,6555 и 1,6556. **10.** а) 700 и 800; б) −700 и −600; в) −600 и −500; г) 900 и 1000. **11.** 3700 и 3800. **12.** а) нет; б) да.

§ 3. 1. а) 500; б) 820; в) 4310; г) 21 660; д) 12 810; е) 17 720. **2.** а) 32 000; б) 12 000; в) 101 000; г) 246 000; д) 270 000; е) 20 000. **3.** а) 1; б) 0; в) 1; г) 0; д) 3; е) 12; ё) 11; ж) −25; з) 0; и) −1; й) −10; к) −11. **4.** а) 5,9; б) 2,5; в) −1,6; г) 5,3; д) 4; е) −2; ё) 3,3. **5.** а) 3,42; б) 15,28; в) −0,32; г) −1; д) −2,2; е) −10,01; ё) 0,17. **6.** а) $25782 \cdot 10^{\circ}$; б) $26 \cdot 10^3$; в) $257822 \cdot 10^{-1}$.

§ 4. 1. а) 451 ± 11; б) 2,01 ± 0,08; в) −1,16 ± 0,12; г) 0,613 ± 0,025. **2.** а) 2,11; абс. погр. 0; б) −0,96; абс. погр. 0,006; в) 1,57; абс. погр. 0,002; г) 3,34; абс. погр. 0,0032. **3.** а) 7,05; б) 2,4; в) 1,01; г) 4,99; д) 1,87; е) 2,91. **4.** Вася. *Указание.* Надо подсчитать количество шагов при минимальной и максимальной длине шага. **5.** а) 8,05; абс. погр. 0,184;

б) 29,995; абс. погр. 0; в) 5,16; абс. погр. 0,0396; г) 8,092; абс. погр. 0,0056. **6.** $3{,}075 \pm 0{,}0615$ (абс. погр.). **7.** $4{,}8 \pm 0{,}16$ (абс. погр.).

§ 5. 1. а) 0,87; б) 1,18; в) 0,95; г) 1,06. **2.** а) 0,9, асб. погр. $< 0{,}1$; б) $1{,}018 \pm 0{,}001$; в) $0{,}94 \pm 0{,}01$; г) $1{,}05 \pm 0{,}01$. **3.** а) 0,94; б) 1,05; в) 0,986; г) 1,0175. **4.** а) $0{,}9965 \pm 0{,}0001$; б) $1{,}017 \pm 0{,}001$; в) $0{,}985 \pm 0{,}001$; г) $1{,}016 \pm 0{,}001$. **5.** а) $1{,}64 \pm 0{,}02$; б) $1{,}47 \pm 0{,}02$; в) $1{,}491 \pm 0{,}00015$; г) $1{,}624 \pm 0{,}0016$. **6.** а) $2{,}08 \pm 0{,}02$; б) $3{,}07 \pm 0{,}03$; в) $1{,}4243 \pm 0{,}00015$; г) $2{,}1626 \pm 0{,}00002$.

§ 6. 2. а) 3; б) 4; в) 6; г) 7; д) 7; е) 8; ё) 8. **3.** а) $1{,}16 \pm 0{,}05$; б) $1{,}032 \pm 0{,}001$; в) $0{,}94 \pm 0{,}01$; г) $0{,}991 \pm 0{,}0001$. **4.** а) $2{,}835 \pm 0{,}003$; б) $7{,}0714 \pm 0{,}0007$; в) $4{,}6 \pm 0{,}05$; г) $8{,}5 \pm 0{,}08$; д) $2{,}025 \pm 0{,}0002$; е) $2{,}8 \pm 0{,}03$; ё) $0{,}49 \pm 0{,}0005$; ж) $0{,}62 \pm 0{,}01$; з) $0{,}96 \pm 0{,}01$; и) $0{,}265 \pm 0{,}015$. **5.** Ответы могут быть разными, в зависимости от выбранного приближённого значения $\sqrt{2}$. *Указание.* Если принять $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{200}{100}} = \frac{\sqrt{200}}{10} = \frac{\sqrt{196+4}}{10} = \frac{14\sqrt{1+\frac{1}{49}}}{10} \approx 1{,}414 \pm 0{,}001$, то ответ $4{,}242 \pm 0{,}003$. **6.** Ответы могут быть разными, в зависимости от выбранного приближённого значения $\sqrt{61}$. *Указание.* $\sqrt{61} = \sqrt{64-3} = 8\sqrt{1-\frac{3}{64}} \approx$ $\approx 8\sqrt{1-0{,}05} \approx 8 \cdot 0{,}975 = 7{,}8 \pm 0{,}01$. **7.** *Указание.* Это диагональ квадрата со стороной 1.

Содержание

Учебное издание

Инновационная школа

Козлов Валерий Васильевич, Никитин Александр Александрович, Белоносов Владимир Сергеевич, Мальцев Андрей Анатольевич, Марковичев Александр Сергеевич, Михеев Юрий Викторович, Фокин Михаил Валентинович

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7 класса
общеобразовательных
организаций

Под редакцией академика РАН *В.В. Козлова*
и академика РАО *А.А. Никитина*

Редактор *Е.В. Лебедева*
Художественный редактор *В.В. Тырданова*
Рисунки *Е.А. Бреславского*
Корректор *Г.А. Голубкова*
Вёрстка *Л.Х. Матвеевой*

Подписано в печать 17.01.17. Формат 70×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 28. Тираж 7000 экз. Заказ № 39578.
Изд. № 16090.

ООО «Русское слово — учебник».
125009, Москва, ул. Тверская, д. 9, стр. 5.
Тел.: (495) 969-24-54, (499) 689-02-65.

ISBN 978-5-00092-930-8

Отпечатано в соответствии с качеством
предоставленных издательством
электронных носителей
в АО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
www.sarpk.ru